5. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS[1]

5.1. Introdução:

Consideremos os seguintes enunciados:

- Quais são as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume v e com a menor área de superfície possível?
- A temperatura T em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T = T(x, y)$. Como vamos determinar a temperatura máxima num disco fechado de raio r centrado na origem? E a temperatura mínima?

Para resolver essas e outras questões, vamos pesquisar máximos e/ou mínimos de funções de duas ou mais variáveis.

O máximo ou mínimo de uma função de duas variáveis pode ocorrer na fronteira de uma região ou no seu interior. Inicialmente, vamos analisar exemplos em que os máximos e mínimos encontram-se no interior de uma região. Posteriormente, mostraremos as técnicas para determinar máximos e mínimos na fronteira de um conjunto e também sobre uma curva. Diversos exemplos são dados para ilustrar a aplicação de conceitos e proposições para a resolução de problemas práticos. Alguns exemplos serão dados para visualizarmos o caso de funções com mais de duas variáveis.

5.2. Definições:

Definição 1: Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis. Dizemos que $(x_0, y_0) \in D(f)$ é **ponto** de **máximo absoluto** ou **global** de f se: $\forall (x, y) \in D(f) \Rightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o **valor máximo** de f.

Exemplo:

1) A figura a seguir, gerada a partir do software MAPLE®, através das linhas de comando também apresentadas, mostra o gráfico da função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. O ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo absoluto ou global de f, pois,

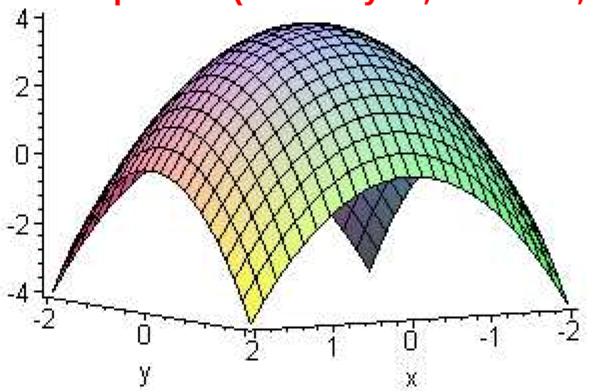
$$\forall (x, y) \in D(f) \Rightarrow 4 - x^2 - y^2 \leq f(0, 0) \text{ ou}$$

$$4 - x^2 - y^2 \leq 4, \ \forall (x, y) \in \Re^2$$

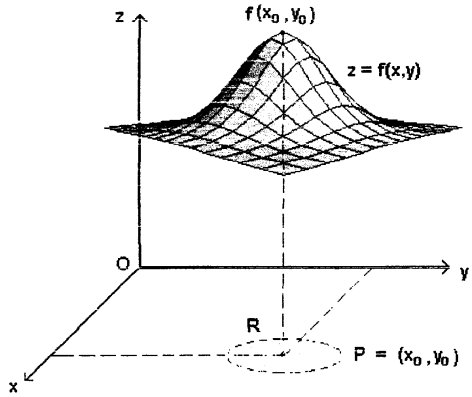
O valor máximo de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ é $f(0, 0) = 4$.

[1] O presente material faz parte da Apostila de Cálculo II, elaborada pelo prof. José Donizetti de Lima. Alguns tópicos da versão original foram suprimidos.

Linhas de comando: MAPLE® => `plot3d(4-x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2);`



Definição 2: Dizemos que a função $z = f(x,y)$ admite um **máximo local** no ponto (x_0, y_0), se existe um disco aberto R contendo (x_0, y_0) tal que $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$, para todos os pontos (x,y) em R, conforme ilustra a figura a seguir.



Definição 3: Seja $z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis. Dizemos que $(x_0, y_0) \in D(f)$ é **ponto** de **mínimo absoluto** ou **global** de f se: $\forall (x,y) \in D(f) \Rightarrow f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$. Neste caso, dizemos que $f(x_0, y_0)$ é o **valor mínimo** de f.

Exemplo:

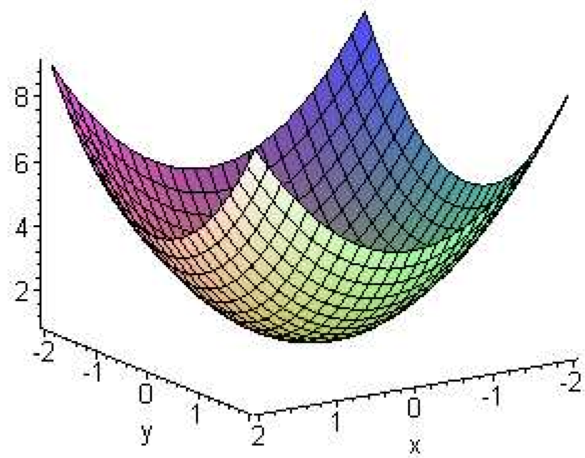
1) A figura a seguir, gerada a partir do software MAPLE®, através das linhas de comando também apresentadas, mostra o gráfico da função $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$. O ponto $(0,0)$ é um ponto de mínimo absoluto ou global de f, pois,

$$\forall (x,y) \in D(f) \Rightarrow 1 + x^2 + y^2 \geq f(0,0) \text{ ou}$$

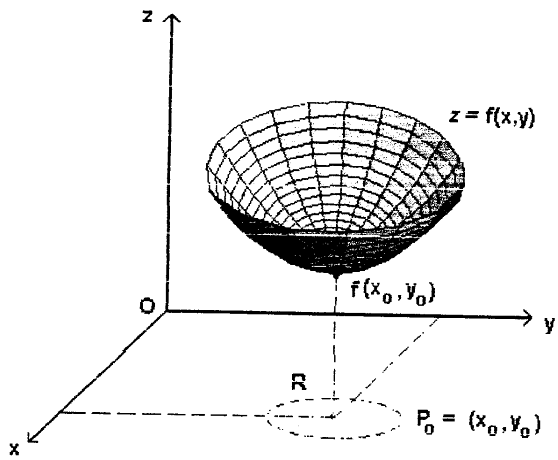
$$1 + x^2 + y^2 \geq 1, \ \forall (x,y) \in \Re^2$$

O valor mínimo de $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$ é $f(0,0) = 1$.

Linhas de comando: MAPLE® => `plot3d(1+x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2);`



Definição 4: Dizemos que a função $z = f(x,y)$ admite um **mínimo local** no ponto (x_0, y_0), se existe um disco aberto R contendo (x_0, y_0) tal que $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$, para todos os pontos (x,y) em R, conforme ilustra a figura a seguir.



Nota: Ao máximo local e ao mínimo local de uma função chamam-se extremos dessa função, ou em outras palavras, dizemos que uma função admite um extremo num dado ponto, se ela tem nesse ponto um máximo ou um mínimo.

Exemplos:

1) Mostre que a função $f(x,y)=(x-1)^2+(y-2)^2-1$ admite um mínimo local no ponto $P(1,2)$.
Solução:
Sabemos que:

$$(x-1)^2 \geq 0 \text{ e } (y-2)^2 \geq 0$$

Assim,

$$(x-1)^2+(y-2)^2 \geq 0 \overset{\text{(somando -1)}}{\Rightarrow} (x-1)^2+(y-2)^2-1 \geq -1 \Rightarrow f(x,y) \geq -1 = f(1,2)$$

$$\therefore (1,2) \text{ é um ponto de mínimo.}$$

2) Mostre que a função $f(x,y)=\frac{1}{2}-\text{sen}\,(x^2+y^2)$ admite um máximo local na origem.

Solução:

De fato, para a origem, $x=0$ e $y=0$, temos: $f(0,0)=\frac{1}{2}$.

Por outro lado, fazendo: $\frac{1}{2}=\text{sen}\,(x^2+y^2) \Rightarrow x^2+y^2=arc\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$

Escolhendo no interior (vizinhança do ponto analisado) do círculo de raio $r=\frac{\sqrt{\pi}}{6}$ e centro $(0,0)$ $x^2+y^2=\frac{\pi}{6}$, um ponto (x,y), então, $0 \leq x^2+y^2 \leq \frac{\pi}{6}$ e deste modo $\text{sen}\,(x^2+y^2) \geq 0$(pois o ângulo analisado é agudo).

$$f(x,y)=\frac{1}{2}-\text{sen}\,(x^2+y^2) \leq \frac{1}{2} = f(0,0)$$

$$\therefore (0,0) \text{ é um ponto de máximo.}$$

Teorema 1: (**Condições necessárias para existência de um extremo**)

Se a função $z=f(x,y)$ admite um extremo para os valores $x=x_0$ e $y=y_0$, então **cada derivada parcial** de **primeira ordem** de z **anula-se** para esses valores das variáveis independentes **ou não existem**.

Assim, nos pontos extremos, temos:

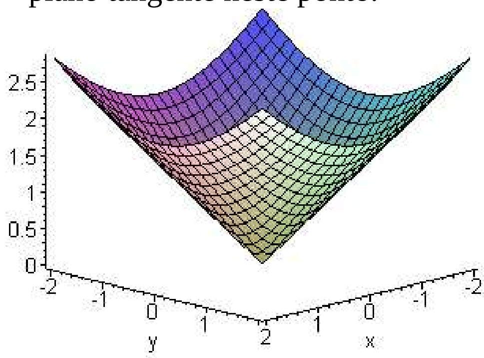
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = 0}$$

Geometricamente, esse teorema nos diz que se (x_0, y_0) é um ponto extremo de $z = f(x,y)$ então o plano tangente à superfície dada, no ponto analisado é paralelo ao plano xOy (plano horizontal).

Nota: Este teorema fornece uma condição necessária, mas não uma condição suficiente. Em outras palavras, se o ponto for um ponto extremo as derivadas se anulam, porém quando as derivadas se anulam não podemos garantir que este ponto seja um ponto extremo. Ou ainda, não vale a volta.

Exemplos:

1) Dada a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ e estas derivadas parciais não são definidas para $x = 0$ e $y = 0$ (não sendo diferenciável nesse ponto). O gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, apresenta um ponto anguloso na sua origem, $P(0,0,0)$, não admitindo plano tangente neste ponto.



Observe que essa função admite um ponto de mínimo em

$$x = 0 \text{ e } y = 0$$

A parte final do Teorema 1 garante que, se não existir as derivadas parciais, no ponto analisado, nesse caso também, esse ponto será um ponto extremo.

```
plot3d(sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2);
```

Nota: **Esse teorema não fornece uma condição suficiente** para a existência de um extremo, ou seja, se as derivadas parciais de 1ª ordem de uma função $z = f(x,y)$ anulam-se no ponto (x_0, y_0) não implica que esse ponto é um extremo dessa função.

2) Dada a função $f(x,y) = x^2 - y^2$, temos: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ e estas derivadas anulam-se para $x = 0$ e $y = 0$. Mas esta função não tem nem máximo nem mínimo para estes valores. Com efeito, ela anula-se na origem, mas toma, na vizinhança deste ponto, tanto valores positivos como valores negativos, portanto o valor zero não é um extremo, como mostra as figuras a seguir. Tal ponto é conhecido como **ponto de sela**.

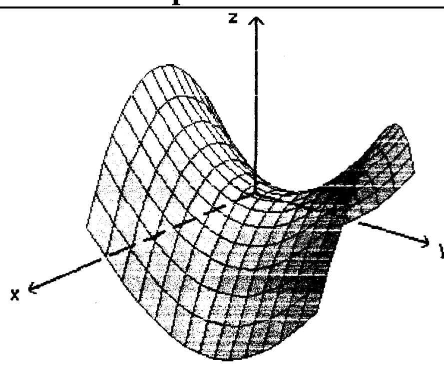
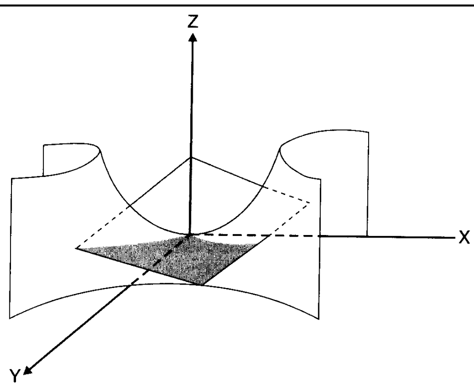
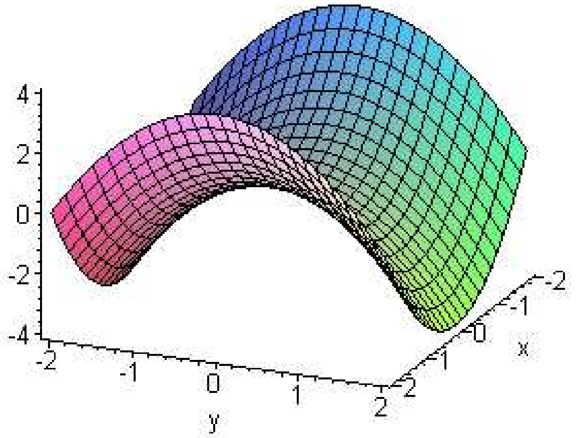


Figura gerada pelo software MAPLE ®



O plano tangente é horizontal

Construção de uma função no software MAPLE ® `plot3d(x^2-y^2,x=-2..2,y=-2..2);`	

5.3. Ponto crítico de uma função de duas variáveis

Seja função $z = f(x, y)$ definida num conjunto aberto. Um ponto (x_0, y_0) desse conjunto é um **ponto crítico** de f se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são iguais a zero ou se f não é diferenciável em (x_0, y_0).

Geometricamente, podemos pensar nos pontos críticos de uma função $z = f(x, y)$ como os pontos em que seu gráfico não tem plano tangente ou o plano tangente é horizontal.

Nota: Os extremantes (pontos extremos, ou seja, ponto de máximo ou de mínimo) de $z = f(x, y)$ estão entre os seus pontos críticos. No entanto, um ponto crítico nem sempre é um ponto extremante. Um ponto crítico que não é um ponto extremante é chamado um **ponto de sela**.

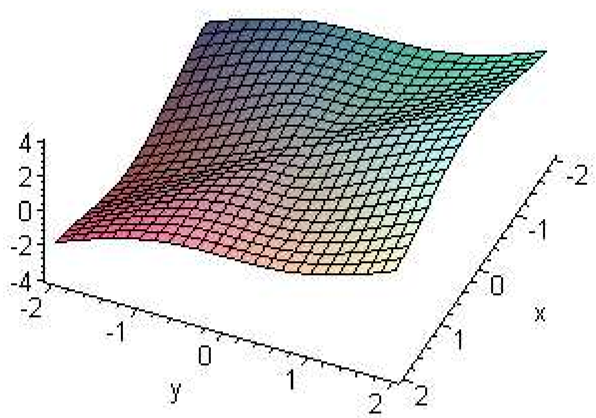
Exemplo:

1) Verifique que o ponto $(0,0)$ é ponto crítico da função $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Solução:
O ponto $(0,0)$ é ponto crítico da função dada, pois $f(x, y)$ não é diferenciável (as derivadas de 1ª ordem não são contínuas no ponto analisado). A figura a seguir mostra que essa função não admite plano tangente na origem.

Linhas de comando no software MAPLE ®

```
plot3d((2*y^3)/(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2);
```



5.4. Condição necessária para a existência de pontos extremantes (= teorema 1)

Seja função $z = f(x, y)$ uma função diferenciável num conjunto aberto. Se um ponto (x_0, y_0) desse conjunto é um **ponto extremante local** (ponto de máximo ou de mínimo local), então,

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

isto é, (x_0, y_0) é um ponto crítico de f.

Exemplos:

1) Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

Solução:

1º Passo) Determinação das derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + 3x^2 - 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy$$

2º Passo) Resolução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Da equação $6xy = 0$ concluímos que $x = 0$ ou $y = 0$.

Fazendo $x = 0$, na primeira equação de (1), vem

$$3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Assim, temos os pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$

Por outro lado, fazendo $y = 0$, na primeira equação de (1), vem

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Logo os pontos críticos são: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

Portanto, a função dada tem quatro pontos críticos: $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

2) Determine os pontos críticos da função $f(x, y) = x.e^{-x^2 - y^2}$

Solução:

1º Passo) Determinação das derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2 - y^2} - 2x^2.e^{-x^2 - y^2} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy.e^{-x^2 - y^2}$$

2º Passo) Resolução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2 - y^2} = 2x^2.e^{-x^2 - y^2} \Rightarrow 1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -2xy.e^{-x^2 - y^2} = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{-2}_{\neq 0}.\underbrace{x}_{\neq 0}.y.\underbrace{e^{-x^2 - y^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Logo os pontos críticos são: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

5.5. Condição suficiente para um ponto crítico ser extremante local

Teorema: Seja $z = f(x, y)$ função cujas derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas num conjunto aberto que contém (x_0, y_0) e suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f. Seja $H(x, y)$ o determinante:

$$\boxed{H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}}$$

Temos:

- Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f.
- Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f.
- Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não é extremante local. Nesse caso, (x_0, y_0) é um ponto de sela.
- Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar (pode ser um ponto de máximo, mínimo ou sela).

Notas:

- A matriz $H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$ aparece em diversas situações num curso de Cálculo e é conhecida como matriz hessiana. O seu determinante, $H(x, y)$, é chamado determinante hessiano da função $z = f(x, y)$, ou hessiano da função.
- A demonstração desse teorema é bastante complexa. A idéia fundamental é usar as derivadas parciais de 2ª ordem da função $f(x, y)$ para determinar o tipo de parabolóide que melhor se aproxima do gráfico da função próximo de um ponto crítico (x_0, y_0). O parabolóide que melhor se aproxima do gráfico de $f(x, y)$, próximo ao ponto crítico (x_0, y_0), é o gráfico da função polinomial: $P(x,y) = \frac{1}{2}Ax^2 + Bxy + \frac{1}{2}Cy^2 + Dx + Fy + G$.

Exemplos:

1) Classificar os pontos críticos da função $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

Solução:

Em exemplo anterior, mostramos que os pontos críticos são: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$.

O determinante hessiano é dado por: $H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$.

Temos:

- Análise do ponto (0, 1).

Nesse caso,

$$H(0,1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

Assim, como $H(0,1) < 0$, (0, 1) é ponto de sela.

- Análise do ponto (0, -1).

Nesse caso,

$$H(0,-1) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36$$

Assim, como $H(0,-1) < 0$, (0, -1) é ponto de sela.

- Análise do ponto (1, 0).

Nesse caso,

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

Logo, como $H(1,0) > 0$, devemos analisar o sinal de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)$.

Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6$.

Assim, como $H(1,0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) > 0$, (1, 0) é ponto de mínimo local de f.

- Análise do ponto (-1, 0).

Nesse caso,

$$H(-1,0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36$$

Logo, como $H(-1,0) > 0$, devemos analisar o sinal de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)$.

Temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -6$.

Assim, como $H(-1,0) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) < 0$, (-1, 0) é ponto de máximo local de f.

Portanto, os pontos críticos de $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$ são classificados como:

- (0, 1) e (0, -1) são pontos de sela.
- (1, 0) é ponto de mínimo local.
- (-1, 0) é ponto de máximo local.

2) Mostrar que $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 5$ tem mínimo local em (1, 1).

Solução:
Vamos, inicialmente, verificar se (1, 1) é ponto crítico.
Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - \frac{3}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - \frac{3}{y^2}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$, concluímos que (1, 1) é ponto crítico de f.
Vamos agora determinar o hessiano,

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 2 + \frac{6}{x^3} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{6}{y^3} \end{vmatrix} = \left(2 + \frac{6}{x^3}\right).\left(2 + \frac{6}{y^3}\right) - 1$$

Assim,

$$H(1,1) = 63 > 0$$

Temos também que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 8 > 0$$

Portanto, como $H(1,1) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) > 0$, (1, 1) é um ponto de mínimo local da função dada.

3) Determinar e classificar os pontos críticos da função $f(x, y) = x.e^{-x^2-y^2}$

Solução:

Determinação das derivadas parciais: $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} - 2x^2.e^{-x^2-y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2xy.e^{-x^2-y^2}$

Resolução do sistema: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2-y^2} = 2x^2.e^{-x^2-y^2} \Rightarrow 1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -2xy.e^{-x^2-y^2} = 0 \quad \Rightarrow \underbrace{-2}_{\neq 0}.\underbrace{x}_{\neq 0}.y.\underbrace{e^{-x^2-y^2}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Logo os pontos críticos são: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Determinação das deriadas parcias de 2ª ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x \cdot e^{-x^2-y^2} - 4x \cdot e^{-x^2-y^2} + 4x^3 \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-6x + 4x^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y \cdot e^{-x^2-y^2} + 4x^2 \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y + 4x^2 y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2y \cdot e^{-x^2-y^2} + 4x^2 y \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2y + 4x^2 y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \cdot e^{-x^2-y^2} + 4xy^2 \cdot e^{-x^2-y^2} = e^{-x^2-y^2} \cdot (-2x + 4xy^2)$$

O determinante hessiano é dado por: $H(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$.

Para $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$, temos: $e^{-\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-0^2}=e^{-\frac{1}{2}-0}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

- Análise do ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

Nesse caso,

$$H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(3\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot 0 \\ \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot 0 & \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\sqrt{2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} & 0 \\ \cdot 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} \end{vmatrix}=\frac{4}{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}>0$$

Desta forma, como $H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)>0$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ é um ponto de mínimo local.

- Análise do ponto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

Nesse caso,

$$H\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(-3\sqrt{2}+\sqrt{2}\right) & 0\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \\ 0\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} & \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e}}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) \end{vmatrix}==\begin{vmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}} \end{vmatrix}=\frac{4}{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{e}}<0$$

Dessa forma, como $H\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)>0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)<0$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ é um ponto de máximo local.

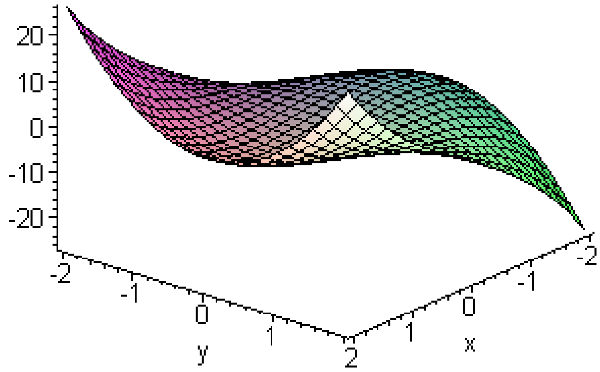
Portanto, ponto de máximo: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ e Ponto de mínimo: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$

4) Determinar e classificar os pontos críticos da função $f(x,y)=2x^3+2y^3-6x-6y$.
Resposta: Pontos de sela =>(1, -1) e (-1, 1); Ponto de máximo=>(-1, -1); Ponto de mínimo=>(1,1)

5) Determinar e classificar os pontos críticos da função $f(x,y)=(2x^2+y^2).e^{1-x^2-y^2}$
Resposta: Pontos críticos => (0, 0) ; (0, 1); (0, -1); (1, 0); (-1, 0)
Pontos de sela => (0, 1) e (0, -1); Ponto de máximo => (1, 0); Ponto de mínimo => (1, 0)

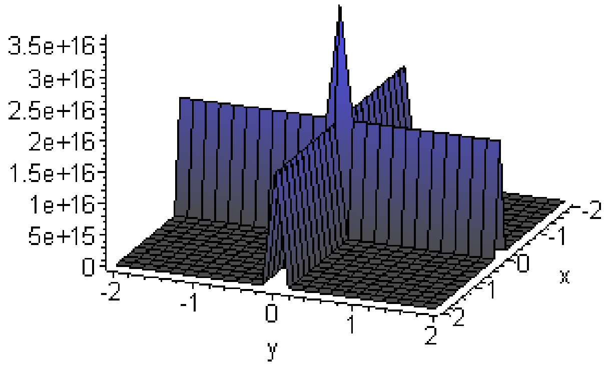
Visualização gráfica, usando o software MAPLE®:

1) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$ => `plot3d(3*x*y^2+x^3-3*x,x=-2..2, y=-2..2);`

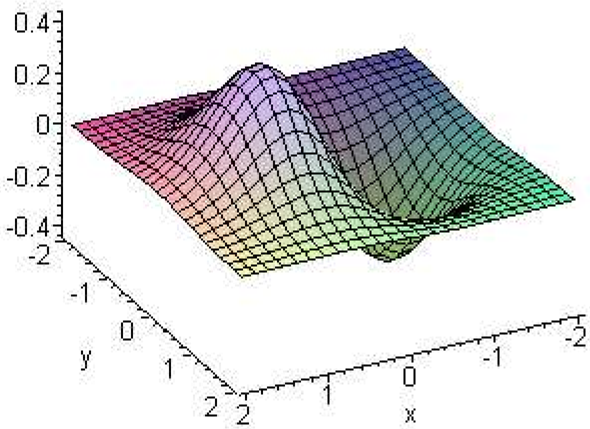


2) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{3}{y} + 5$ =>

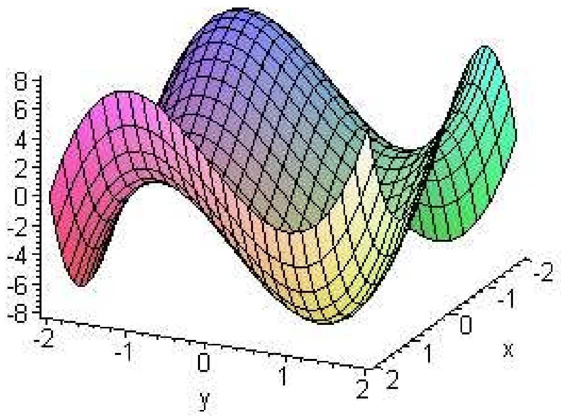
`plot3d(x^2+x*y+y^2+3/x+3/y+5,x=-2..2,y=-2..2);`



3) $f(x,y) = x.e^{-x^2-y^2}$ => `plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2);`

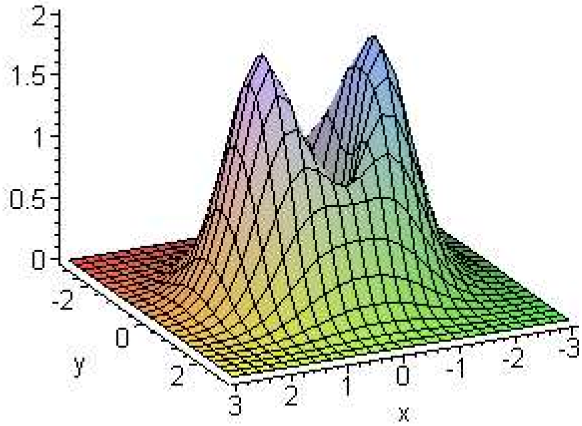


4) $f(x,y)=2x^3+2y^3-6x-6y$ => `plot3d(2*x^3+2*y^3-6*x-6*y,x=-2..2,y=-2..2);`



5) $f(x,y)=(2x^2+y^2).e^{1-x^2-y^2}$ =>

`plot3d((2*x^2+y^2)*exp(1-x^2-y^2),x=-3..3,y=-3..3);`



6) Seja $f(x,y)=3x^4+2y^4$. O único ponto crítico de f é $(0,0)$ e temos $H(0,0)=0$; logo, o teorema não nos fornece informação sobre este ponto crítico. Entretanto, trabalhando diretamente com a função verifica-se, sem dificuldade, que $(0,0)$ é ponto de mínimo global.

Teorema: Se $f(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+l$, onde a,b,c,d,e e l são constantes, então se (x_0,y_0) for extremante local de f (mínimo local ou máximo local), então será extremante global.

Nota: A demonstração pode ser feita ao observarmos que o gráfico de $g(t)=f(x_0+ht,y_0+kt)$ (h e k constantes) é uma parábola.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS:

1) Usando o teorema anterior, estude com relação a extremantes globais as funções:

a) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
Resposta: Mínimo Global => (2, -3/2)

b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y$
Resposta: Ponto de sela => (10/13, 11/13), ou seja, não admite extremantes

c) $f(x,y) = x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
Resposta: Máximo Global => (1/4, 1/4)

d) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$
Resposta: Mínimo Global => (2/11, 10/11)

e) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
Resposta: Ponto de sela => (2, -2), ou seja, não admite extremantes

f) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$
Resposta: Mínimo global => (1, 2)

Teorema: Seja $f(x,y,z)$ de classe C^2 (admite todas as derivadas parciais de ordem 2 contínuas) e seja (x_0, y_0, z_0) um ponto interior do domínio de f. Considerando que (x_0, y_0, z_0) seja um ponto crítico de f e sejam ainda $H(x,y,z)$ e $H_1(x,y,z)$ dadas por:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} \text{ e } H_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Notas:

1) Lembre-se pelo teorema de Schwartz, temos: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$

2) As derivadas de cada variável são colocadas por colunas e não por linhas.

3) Essas matrizes são matrizes simétricas ($M = M^t$). Na realidade elas são matrizes positiva definida.

- Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) > 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de mínimo local.
- Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $H_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ e $H(x_0, y_0, z_0) > 0$, então (x_0, y_0, z_0) será ponto de máximo local.
- Se $H(x_0, y_0, z_0) < 0$ ou $H_1(x_0, y_0, z_0) < 0$, então (x_0, y_0, z_0) será um ponto de sela.

Exemplo:

1) Estude com relação a máximo e mínimos locais da função $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$. **Resposta**: Mínimo Local => (1, 0, 2)

Solução: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4x + 10y - 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ 4x + 10y = 4 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \ \ e \ \ z = 2$

Assim, (1, 0, 2) é o único ponto crítico.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4; \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4; \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 4; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

Logo,

$$H(1,0,2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80 - 64 = 16 > 0; \quad H_1(1,0,2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 16 > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0,2) = 2 > 0$$

Portanto, como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0,2) > 0$, $H_1(1,0,2) > 0$ e $H(1,0,2) > 0$, então $(1,0,2)$ é ponto de mínimo local.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS

1) Estude com relação a máximo e mínimos locais das funções:

a) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y - 3z + 2$

Resposta: Mínimo Local => (1, 1, 1); Máximo Local => (-1, -1, 1); Pontos de sela => (1, -1, 1); (1, 1, -1); (1, -1, -1); (-1, 1, 1); (-1, 1, -1) e (-1, -1, -1),ou seja, não são extremantes

b) $f(x,y,z) = x^3 + 2xy + y^2 + z^2 - 5x - 4z$

Resposta: Mínimo Local => (5/3, -5/3, 2); Ponto de sela => (-1, 1, 2), ou seja, não é extremante

c) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + 2xz - 4yz - 2x - 6z$

Resposta: Ponto de sela => (5/7, -4/7, 2/7), ou seja, não é extremante.

5.6. APLICAÇÕES:

A maximização e a minimização de funções de várias variáveis são problemas que aparecem em vários contextos práticos, como, por exemplo:

- Problemas geométricos.
- Problemas físicos
- Problemas econômicos, etc.

A seguir são apresentadas aplicações enfatizando problemas econômicos.

Revisão conceitual: $\boxed{LUCRO = RECEITA - DESPESA = VENDA - CUSTO}$

Exemplos:

1) Uma industria produz dois produtos denotados por A e B. O lucro da indústria pela venda de x unidades do produto A e y unidades do produto B é dado por:

$$L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy$$

Supondo que toda a produção da indústria seja vendida, determinar a produção que maximiza o lucro. Determine, também, esse lucro.

Solução:

Diante do problema apresentado, temos que:

$$\begin{aligned} &Max\ \ L(x, y) = 60x + 100y - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy \\ &sujeito\ \text{a}:\ x\,,\, y \geq 0 \end{aligned}$$

Inicialmente, determinemos os pontos críticos dessa função.

Temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 60 - 3x - y \ \text{ e } \ \frac{\partial L}{\partial y} = 100 - 3y - x$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 60 - 3x - y = 0 \\ 100 - 3y - x = 0 \end{cases}$ obtemos a solução: $x = 10$ e $y = 30$.

Agora, resta nos verificar se esse ponto encontrado é um ponto de máximo.

Temos: $H(x, y) = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow H(10, 30) = 8 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(10, 30) = -3 < 0$.

Assim, o ponto (10, 30) é um ponto de máximo e representa a produção que maximiza o lucro da indústria.

Para determinar o lucro máximo, basta calcularmos:

$$L(10, 30) = 60 \cdot 10 + 100 \cdot 30 - \frac{3}{2} \cdot (10)^2 - \frac{3}{2} \cdot (30)^2 - 10 \cdot 30 = 1.800 \text{ unidades monetárias (u. m).}$$

2) Uma determinada empresa produz dois produtos cujas quantidades são indicadas por x e y. Tais produtos são oferecidos ao mercado consumidor a preços unitários p_1 e p_2, respectivamente, que dependem de x e y conforme equações: $p_1 = 120 - 2x$ e $p_2 = 200 - y$. O custo total da empresa para produzir e vender quantidades x e y dos produtos é dado por $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$. Admitindo que toda produção da empresa seja absorvida pelo mercado, determine a produção que maximiza o lucro. Qual o lucro máximo? **Resposta**: (10, 30) =>3.600

Solução:

Produto 1: x e Preço 1: p_1; Produto 2: y e Preço 2: p_2

Como: $LUCRO = VENDA - CUSTO$: L = V – C, Onde:

Vendas: $V = (120 - 2x) \cdot x + (200 - y) \cdot y \Rightarrow V = 120x - 2x^2 + 200y - y^2$

Custo: $C = x^2 + 2y^2 + 2xy$

Assim, $L = 120x - 2x^2 + 200y - y^2 - x^2 - 2y^2 - 2xy \Rightarrow L = 120x - 3x^2 + 200y - 3y^2 - 2xy$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 120 - 6x - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 200 - 6y - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y = 120 \\ 6y + 2x = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 60 \\ 3y + x = 100 \end{cases} \Rightarrow x = 10 \ e \ y = 30$$

Deve-se determinar o hessiano para mostrar que realmente este ponto é um ponto de máximo.

Para determinar o lucro máximo, basta calcular:

$$L(10{,}30) = 120 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2 + 200 \cdot 30 - 3 \cdot 30^2 - 2 \cdot 10 \cdot 30 \ \Rightarrow L(10{,}30) = 3.600$$

Portanto, deve-se produzir 10 unidades do produto 1 e 30 unidades do produto 2 e o lucro será de 3.600 unidades monetárias (u.m).

3) Para produzir determinado produto cuja quantidade é representada por z, uma empresa utiliza dois fatores de produção (insumos) cujas quantidades serão indicadas por x e y. Os preços unitários dos fatores de produção são, respectivamente, 2 e 1. O produto será oferecido ao mercado consumidor a um preço unitário igual a 5. A função de produção da empresa é dada por $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$. Determine a produção que maximiza o lucro. Qual o lucro máximo? **Resposta**: (15,8; 20,4) => 1.576,20

Solução:

Produto 1: x e Custo: 2; Produto 2: y e Custo: 1; Preço de venda: 5

Produção: $z = 900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y$

Como: $LUCRO = VENDA - CUSTO$: L = V – C, Onde:

Vendas: $V = 5 \cdot z$

Custo: $2x + y$

Assim, $L = 5 \cdot (900 - x^2 - y^2 + 32x + 41y) - (2x + y) = 4.500 - 5x^2 - 5y^2 + 160x + 205y - 2x - y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -10x + 160 - 2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -10y + 205 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x = -158 \\ -10y = -204 \end{cases} \Rightarrow x = 15{,}8 \ e \ y = 20{,}4$$

Deve-se determinar o hessiano para mostrar que realmente este ponto é um ponto de máximo.

Para determinar o lucro máximo, basta calcular:

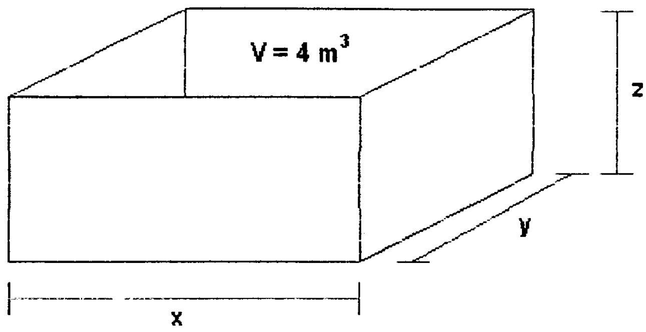
$$L(15{,}8;\, 20{,}4) = \ldots = 1.576{,}20$$

Portanto, deve-se produzir 15,8 unidades do produto 1 e 20,4 unidades do produto 2 e o lucro será de 1.576,20 unidade monetárias (u.m.).

4) Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $4\,m^3$ e com a menor área de superfície possível?

Solução:

Vamos considerar a caixa, conforme ilustra a figura a seguir.



Sendo x e y as arestas da base e z a altura, da geometria elementar (plana e espacial), temos:

- Volume da caixa: $V = xyz$.
- Área da superfície total: $A = xy + 2xz + 2yz$

Nosso objetivo é minimizar $A = xy + 2xz + 2yz$ sabendo que $xyz = 4$ e $x, y, z > 0$.

Podemos simbolicamente escrever:
$$\min \quad A = xy + 2xz + 2yz$$
$$s.a \begin{cases} xyz = 4 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

Costumamos, ao usar essa notação, chamar a função $A = xy + 2xz + 2yz$ de **função objetivo** e as equações e/ou inequações de **restrições**. O símbolo s. a lê-se "sujeito a".

Como, pelo volume, $xyz = 4$, temos: $z = \dfrac{4}{xy}$, e a área a ser minimizada pode ser expressa como função de duas variáveis x e y, $\boxed{A = xy + \dfrac{8}{y} + \dfrac{8}{x}}$.

Procuramos um ponto crítico dessa função, isto é, um ponto em que:
$$\frac{\partial A}{\partial x} = y - \frac{8}{x^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial A}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0$$

Dessas equações resulta que $x = 2$ e $y = 2$, ou seja, o ponto crítico é o ponto (2, 2). Usando o hessiano, podemos confirmar se o mesmo é ponto de mínimo.
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{16}{x^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{y^3} \end{vmatrix} \Rightarrow H(2,2) = \begin{vmatrix} \dfrac{16}{8} & 1 \\ 1 & \dfrac{16}{8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ e } \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}(2,2) = 2 > 0$$

Assim, (2, 2) é um ponto de mínimo.

Portanto, as dimensões da caixa são: $x = 2$ *metros*, $y = 2$ *metros* e $z = \dfrac{4}{xy} = \dfrac{4}{2.2} = 1\,metro$.

Conclusão: A caixa de volume dado, sem tampa, com área de superfície mínima, tem uma base quadrada e altura medindo metade do valor da aresta da base.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS

1) Determine os pontos críticos das funções, a seguir investigue a sua natureza:

a) $f(x,y)=3x^2+2xy+y^2+10x+2y+1$ **Resposta**: Ponto de mínimo => (-2, 1)

b) $f(x,y)=x^2+y^3-6xy$ **Resposta**: Ponto de sela => (0; 0) e Ponto de mínimo => (18, 6)

2) Determine e classifique todos os pontos críticos das seguintes funções de duas variáveis.

a) $f(x,y)=xy-x^2-y^2-2x-2y+4$ **Resposta**: Máximo => $(-2,-2)$

b) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{3}+9y^3-4xy$ **Resposta**: Sela => $(0,0)$ e Mínimo $\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{9}\right)$

c) $f(x,y)=e^{-2x}.\cos y$ **Resposta**: Não tem ponto crítico

d) $f(x,y)=xy+2x-\ln(x^2.y)$ com $x>0$ e $y>0$ **Resposta**: Ponto de mínimo => (1/2, 2)

3) Determine e classifique os extremos e os pontos de sela de f :

a) $f(x,y)=-x^2-4x-y^2+2y-1$ **Resposta**: Ponto de máximo: $f(-2,1)=4$

b) $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ **Resposta**: Ponto de mínimo: $f(0,0)=0$

c) $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$ **Resposta**: Ponto de sela: $f(0,0)=0$ e Ponto de mínimo: $f(1,-1)=-1$

d) $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^4-2x^3+4xy+y^2$ **Resposta**:

Ponto de sela: $f(0,0)=0$; Ponto de mínimo: $f(4,-8)=-64$; Ponto de mínimo: $f(-1,2)=-\dfrac{3}{2}$

e) $f(x,y)=e^x.\text{sen } y$

Resposta: $\begin{cases} e^x.\cos y=0 \\ e^x.sen\, y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y=0 \\ sen\, y=0 \end{cases} \Rightarrow \textit{não existe } y$, logo: não existem pontos críticos.

4) Mostre que a função $f(x,y)=x^4+y^4$ tem um mínimo local na origem.

Resposta: $\begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3=0 \Rightarrow x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=4y^3=0 \Rightarrow y=0 \end{matrix} \Rightarrow (x,y)=(0,0)$ e $H(x,y)=\begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix}$

$H(0,0)=0$ => Nada a concluir pelo teste da 2ª derivada. Mas trabalhando diretamente com a função dada, vemos que o mesmo é ponto de mínimo.

$$f(0,0)=0<f(x,y),\ \forall x\neq 0 \text{ ou } \forall y\neq 0$$

5) Mostre que $f(x,y)=\sqrt{2x^2+4y^2}$ tem um ponto de mínimo em $(0,0)$

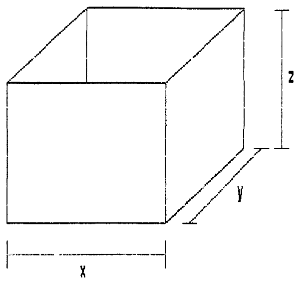
Resposta: Para verificar que é mínimo trabalha-se com a função:

$$f(0,0)=0<f(x,y),\ \forall x\neq 0 \text{ ou } \forall y\neq 0$$

Nota: Observe que não existe as derivadas parciais da função no ponto $(0,0)$, por isso, o mesmo é um ponto crítico.

6) Mostre que uma caixa retangular com tampa e volume dado terá a menor área de superfície se for cúbica.

Solução:



$$A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

$V = xyz = k$, onde: k é o volume dado

De $xyz = k \Rightarrow z = \dfrac{k}{xy} \Rightarrow A(x,y) = 2xy + \dfrac{2k}{y} + \dfrac{2k}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial A}{\partial x} = 2y - \dfrac{2k}{x^2} = 0 \Rightarrow y \cdot x^2 = k \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = 2x - \dfrac{2k}{y^2} = 0 \Rightarrow x \cdot y^2 = k \end{array}\right. \Rightarrow y = x$$

Logo $z = \dfrac{k}{xy} = \dfrac{yx^2}{xy} = x \Rightarrow x = y = z$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4k}{x^3};\ \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 2;\ \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = 2;\ \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{4k}{y^3}$$

Lembre-se: $x, y, z > 0$, pois são as dimensões da caixa. E mais, $x = y = z$ e $\mathrm{k} = \mathrm{xyz}$.

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{4k}{x^3} & 2 \\ 2 & \dfrac{4k}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{16k^2}{x^3 y^3} - 4 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{4k}{x^3} > 0$$

Conclusão: As embalagens deveriam ser cúbicas para se minimizar o custo na confecção das mesmas.

7) Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $8\,m^3$ e com a menor área de superfície possível?

Solução:

$V = 8\ m^3 \Rightarrow\ xyz = 8 \Rightarrow z = \dfrac{8}{xy}$ e $A(x,y) = xy + 2x \cdot \dfrac{8}{xy} + 2y \cdot \dfrac{8}{xy} = xy + \dfrac{16}{y} + \dfrac{16}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial A}{\partial x} = y - \dfrac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow y \cdot x^2 = 16 \\ \dfrac{\partial A}{\partial y} = x - \dfrac{16}{y^2} = 0 \Rightarrow x \cdot y^2 = 16 \end{array}\right. \Rightarrow y = x$$

De $y \cdot x^2 = 16 \Rightarrow x \cdot x^2 = 16 \Rightarrow x^3 = 16 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} \cong 2{,}52\,\mathrm{m}$

Logo: $y = x = 2\sqrt[3]{2} \cong 2{,}52\,\mathrm{m}$ e $z = \dfrac{8}{xy} = \dfrac{8}{2\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{8}{4\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} \cong 1{,}26\,\mathrm{m}$

$V = 2\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{2} \cdot \dfrac{2}{\sqrt[3]{4}} = 8\,\mathrm{m}^3$ ou $V = 2{,}52 \cdot 2{,}52 \cdot 1{,}26 = 8\,\mathrm{m}^3$

Nota: Em situação semelhante a esta sempre teremos: $V = x^2 \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^3}{2}$

5.7. MÁXIMO E MÍNIMOS CONDICIONADOS – MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

- **Introdução**

Consideremos os seguintes problemas:

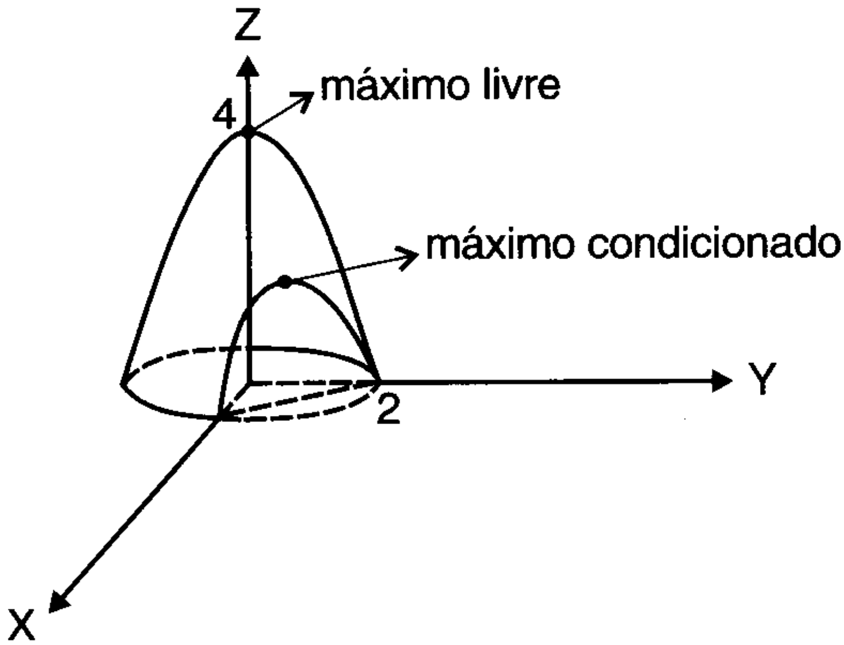
1) Maximizar $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ => $Máx \quad f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

2) Maximizar $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ sujeito a: $x + y = 2$ => $\begin{array}{l} Máx \quad f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \\ s.a: \quad x + y = 2 \end{array}$

O problema (1) é um problema de otimização irrestrita (sem restrição), e podemos solucioná-lo usando as proposições já apresentadas. Por outro lado, no problema (2), temos a presença de uma restrição ou vínculo. Neste último problema, estamos diante de um problema de otimização restrita, onde queremos encontrar o maior valor da função num subconjunto de seu domínio, nesse caso, o subconjunto do plano xy, dado pela reta $x + y = 2$.

Nesse contexto, a solução do problema (1) é chamada um ponto de máximo livre ou não-condicionado de f. A solução do problema (2) é dita um ponto de máximo condicionado de f.

Uma visualização da solução desses problemas é dada na figura a seguir.



Notas:

1) Se a função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, conhecida como função objetivo (função que se quer maximizar ou minimizar) e a restrição $g(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ forem lineares, teremos problemas de Programação Linear.

2) De forma geral, problemas de otimização restrita podem ser muito complexos, não havendo um método geral para encontrar a solução de todas as classes de problemas. Em algumas situações simples, podemos resolvê-los, explicitando uma variável em função das outras, na restrição, substituindo na função objetivo e resolvendo o problema de otimização irrestrita resultante, como ilustra o exemplo a seguir:

Exemplo 1: $\begin{matrix} Máx & f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \\ s.a & x + y = 2 \end{matrix}$

Solução:

Como: $x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$. Substituindo na função objetivo, temos:

$$f(x,y) = f(x,2-x) = 4 - x^2 - (2-x)^2 = 4 - x^2 - (4 - 4x - x^2) = 4 - x^2 - 4 + 4x - x^2 = -2x^2 + 4x$$

Assim, temos a seguinte função de uma variável a ser maximizada: $f(x) = -2x^2 + 4x$

Calculando a sua derivada, temos: $f'(x) = -4x + 4$.

Determinando o ponto crítico: $0 = -4x + 4 \Rightarrow x = 1$.

Verificando que o mesmo é de máximo: $f''(x) = -4 \Rightarrow f''(1) = -4 < 0$

Logo, 1 é ponto de máximo. Substituindo o valor $x = 1$ em $y = 2 - x$, temos: $y = 1$.

$\therefore$ O ponto máximo é (1, 1).

Nota: Ás vezes, a resolução de $g(x,y) = 0$ é muito difícil ou mesmo impossível. Por isso, teremos que examinar o problema através de um novo método.

Lembre-se: que as coordenadas do vetor gradiente de uma função $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ são as derivadas parciais da função, ou seja:

$$grad\ f(x_1, x_2, ..., x_n) = \nabla f(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

O MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

O método dos multiplicadores de Lagrange permite analisar situações mais gerais. Através desse método, um problema de otimização restrita com **n** variáveis e **m** restrições de igualdade é transformado num problema de otimização irrestrita com **(n + m)** variáveis. Algumas situações particulares são apresentadas a seguir.

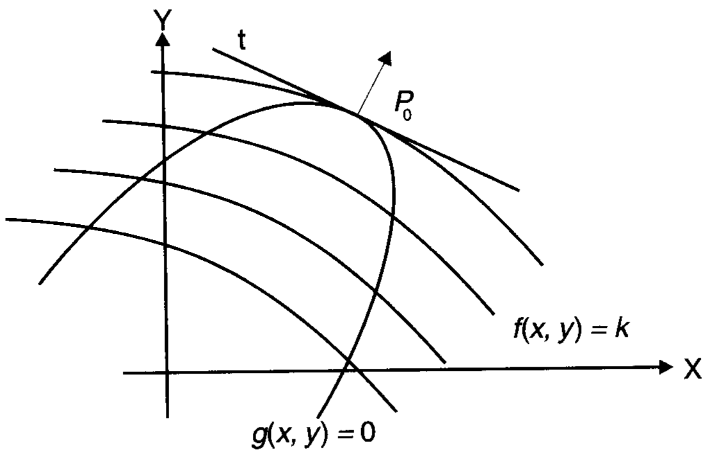
Nota: Esse método, é aplicável também a funções não lineares.

- **PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS E UMA RESTRIÇÃO**

Consideremos o seguinte problema: $\begin{matrix} Máx & f(x,y) \\ s.a: & g(x,y) = 0 \end{matrix}$

Usando as propriedades do vetor gradiente, vamos obter uma visualização geométrica do método de Lagrange, que nos permite determinar os candidatos a pontos de máximo e/ou mínimo condicionados de f .

Para isso, esboçamos o gráfico de $g(x,y) = 0$ e diversas curvas de nível $f(x,y) = k$ da função objetivo, observando os valores crescentes de k. O valor máximo de $f(x,y)$ sobre a curva $g(x,y) = 0$ coincide com o maior valor de k tal que a curva $f(x,y) = k$ interpreta a curva $g(x,y) = 0$. Isso ocorre num ponto P_0 . Nesse ponto, as duas curvas tem a mesma reta tangente t, conforme mostra a próxima figura.



Como $grad\ f$ e $grad\ g$ são perpendiculares à reta t, eles tem a mesma direção no ponto P_0, ou seja:

$$grad\ \mathrm{f} = \lambda \cdot \mathrm{grad\ g}$$

Para algum número real λ.

Nota: Os vetores ∇f e ∇g são múltiplos (ou paralelos, ou de mesma direção ou L. D.)

Claramente, nesse argumento geométrico, fizemos a suposição de que $\nabla g(x, y) \neq (0{,}0)$ em P_0. Além disso, o mesmo argumento pode ser facilmente adaptado para problemas de minimização. Temos o seguinte teorema:

Teorema:
Seja $f(x, y)$ diferenciável num conjunto aberto U. Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U tal que $\nabla g(x, y) \neq (0{,}0)$ para todo $(x,y) \in V$, *onde* $V = \{(x,y) \in U \,/\, g(x,y) = 0\}$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in V$ seja extremante local de f em V é que:

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot g(x_0, y_0)$$

para algum número real λ.

Assim, podemos dizer que os pontos de máximo e/ou mínimo condicionados de f devem satisfazer as equações:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \,.\frac{\partial g}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda . \frac{\partial g}{\partial y} \text{ e } \mathrm{g(x, y)} = 0 \qquad (1)$$

para algum número real λ.

O número real λ que torna compatível o sistema é chamado multiplicador de Lagrange.

O método proposto por Lagrange consiste, simplesmente, em definir a função de três variáveis:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$$

e observar que o sistema (1) é equivalente à equação:

$$\nabla L = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \lambda} = 0\,.$$

Assim, os candidatos a extremantes locais de f sobre $g(x, y) = 0$ são pesquisados entre os pontos críticos de L. Os valores máximo e/ou mínimo de f sobre $g(x, y) = 0$ coincidem com os valores máximo e/ou mínimo livres de L.

É importante observar que o método só permite determinar potenciais pontos extremantes. A classificação desses pontos deve ser feita por outros meios, tais como argumentos geométricos, etc.

Exemplos:

1) $\begin{aligned} &Máx \;\; f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \\ &s.a: \quad x + y = 2 \end{aligned}$

Solução: Para resolver esse problema pelo método de Lagrange, como apresentado, devemos escrever a restrição $x + y = 2$ na forma $x + y - 2 = 0$.

A função lagrangeana é dada por: $L(x, y, \lambda) = 4 - x^2 - y^2 - \lambda(x + y - 2)$

Derivando L em relação às três variáveis x, y e λ, temos:

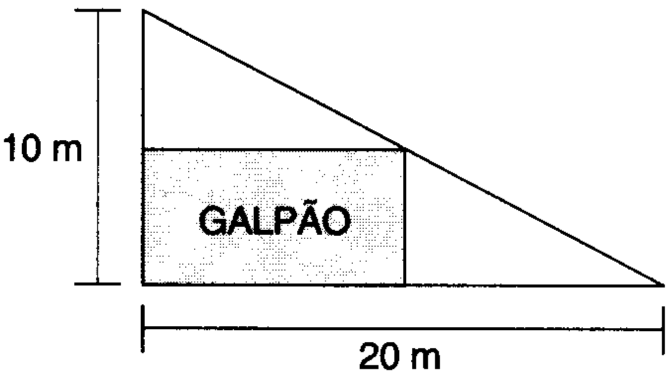
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2x - \lambda \; ; \; \frac{\partial L}{\partial y} = -2y - \lambda \; \text{ e } \; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x - y + 2$$

Igualando essas derivadas a zero, obtemos o sistema de equações:

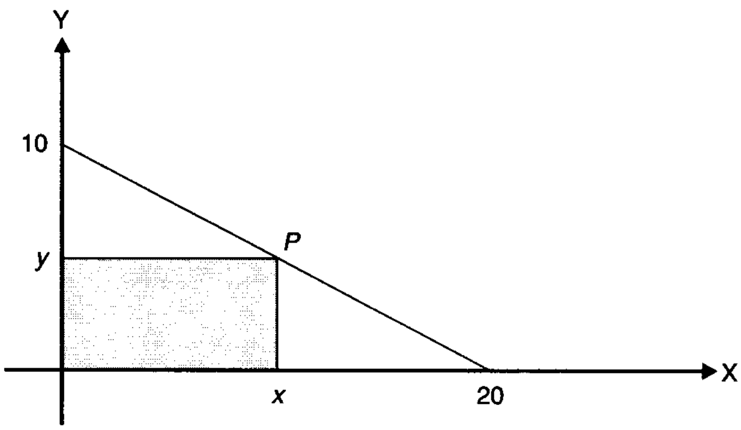
$$\begin{cases} -2x - \lambda = 0 \\ -2y - \lambda = 0 \\ -x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = -2y \Rightarrow x = y \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow \; x = 1 \text{ e } y = 1$$

Assim, o ponto extremante é (1, 1) e substituindo na função objetivo vemos claramente que é ponto de máximo condicionado. Fazendo o **teste da vizinhança do ponto**: $f(1,1) = 4 - 1^2 - 1^2 = 4 - 2 = 2$; $f(2,0) = 4 - 4 - 0 = 0$; $f(0,2) = 4 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow f(1,1) = 2 \geq f(x, y)$. Portanto, (1, 1) é ponto de máximo

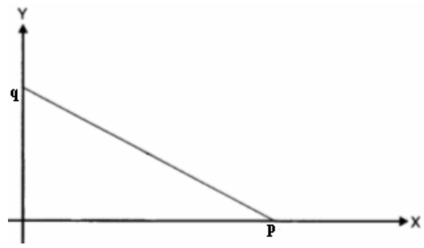
2) **Aplicação**: Um galpão retangular deve ser construído num terreno com a forma de um triângulo, conforme a figura a seguir. Determinar a área máxima possível para o galpão.



Solução: Na figura a seguir, representamos a situação a ser analisada num sistema de coordenadas cartesianas, traçado convenientemente.



Revisão: Equação segmentaria da reta:



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

=> $\dfrac{x}{20} + \dfrac{y}{10} = 1 \Rightarrow x + 2y = 20$

Observando a figura anterior, vemos que a área do galpão é dada por: $A(x, y) = x \cdot y$ e que o ponto $P(x, y)$ deve estar sobre a reta $x + 2y = 20$.

Temos, então, o seguinte problema: $\begin{array}{l} Máx \;\; f(x,y) = xy \\ s.a: \quad x + 2y = 20 \end{array}$

Para resolver o problema pelo método dos multiplicadores de Lagrange, como apresentado, devemos escrever a restrição $x + 2y = 20$ na forma $x + 2y - 20 = 0$.

A função lagrangeana é dada por: $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + 2y - 20)$

Derivando L em relação às três variáveis x, y e λ, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - \lambda \,;\; \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda \;\text{ e }\; \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x - 2y + 20$$

Igualando essas derivadas a zero, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} y - \lambda = 0 \\ x - 2\lambda = 0 \\ x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos: $x = 10$, $y = 5$ e $\lambda = 5$

As dimensões do galpão que fornecem um valor extremo para a sua área são x = 10 m e y = 5 m. Com essas dimensões, a área do galpão será: A = 10 m . 5 m = 50 m^2.

Embora o método não possibilite verificar se esse valor é um valor máximo ou mínimo, através de uma simples inspeção geométrica da figura anterior vemos que, de fato, as dimensões encontradas fornecem a área máxima do galpão.

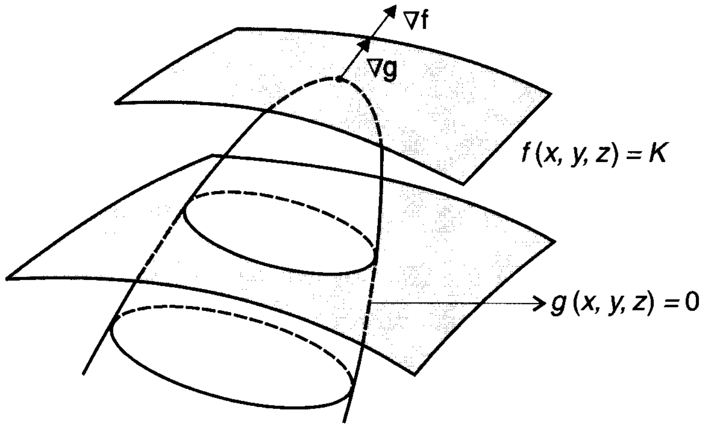
Podemos, também, usar o método da vizinhança do ponto para avaliar se o mesmo é ponto de máximo ou de mínimo: $A(10,5) = 50; A(12,4) = 48; A(16,2) = 32; A(18,1) = 18 \Rightarrow A(10,5) = 50 \geq A(x, y)$, logo, ponto de máximo.

Nota: O multiplicador de Lagrange λ desempenha um papel auxiliar, não sendo de interesse na solução final do problema.

PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS E UMA RESTRIÇÃO

Nesse caso, podemos visualizar o método fazendo um esboço do gráfico de $g(x, y, z) = 0$ e de diversas superfícies de nível $f(x, y, z) = k$ da função objetivo, observando os valores crescentes de k.

Como podemos ver na figura a seguir, no ponto extremante P_0, os vetores *grad f* e *grad g* são paralelos. Portanto, nesse ponto, devemos ter: $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$, para algum real λ.



O método dos multiplicadores de Lagrange para determinar os potenciais pontos extremantes de $w = f(x, y, z)$ sobre $g(x, y, z) = 0$ consiste em definir a função lagrangeana:

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda \cdot g(x, y, z)$$

e determinar os pontos (x, y, z) tais que: $\nabla L = 0$,

ou, de forma equivalente: $\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial y} = 0; \frac{\partial L}{\partial z} = 0$ e $g(x, y, z) = 0$

As hipóteses necessárias para a validade do método são análogas às do teorema anterior.

Exemplos:
1) Determinar o ponto do plano: 2x + y + 3z = 6 mais próximo da origem.
Solução:
Nesse caso, queremos minimizar a distância $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, dos pontos do plano 2x + y + 3z = 6 até a origem. Para simplificar os cálculos, podemos minimizar o quadrado da distância. Temos o seguinte problema de otimização:

$$Min\ \ x^2+y^2+z^2$$
$$s.a: 2x+y+3z=6$$

Para esse problema, a função lagrangeana é dada por:

$$L=x^2+y^2+z^2-\lambda(2x+y+3z-6)$$

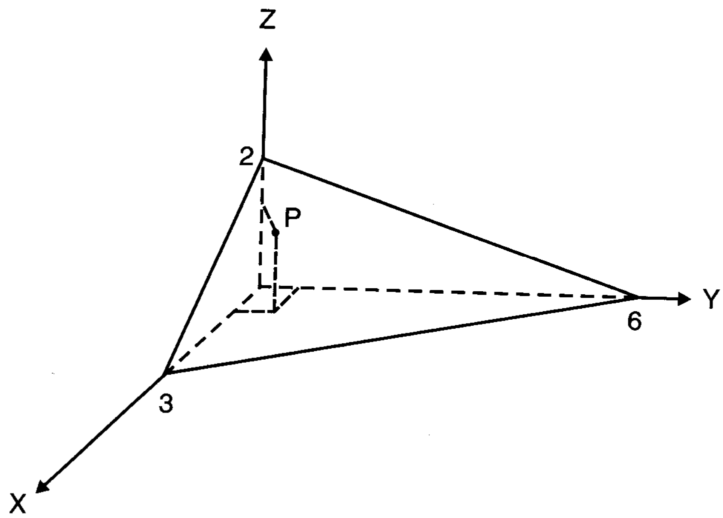
Derivando L em relação às variáveis x, y, z e λ e igualando essas derivadas a zero, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2x-2\lambda=0 \\ 2y-\lambda=0 \\ 2z-3\lambda=0 \\ 2x+y+3z-6=0 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$x=\frac{6}{7}, y=\frac{3}{7}, z=\frac{9}{7}, \lambda=\frac{6}{7}$$

Geometricamente, é claro que o ponto $P\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)$ é um ponto de mínimo, como podemos visualizar na figura a seguir.

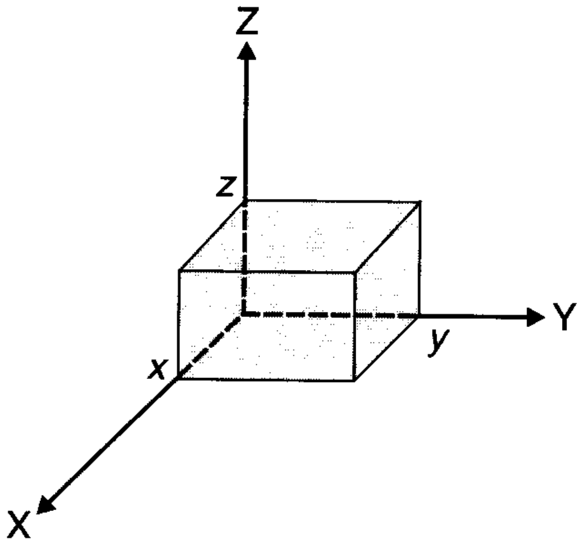


Nota: Usando a função objetivo podemos mostrar que $P\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)$ é ponto de mínimo.

- $f\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)=\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{7}\right)^2}=\sqrt{\frac{126}{49}}=\frac{\sqrt{126}}{7}=\frac{3\sqrt{14}}{7}\cong 1{,}60.$
- $f(0,0,2)=\sqrt{(0)^2+(0)^2+(2)^2}=2$ (o ponto a ser analisado deve pertencer necessariamente ao domínio da função).
- Tomando um outro ponto do domínio, por exemplo: (1, 1, 1), temos:
  $f(1,1,1)=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\cong 1{,}73$, $\therefore$ $f\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)\geq f(x,y,z),\ \forall\, x,y,z\in$ plano$:2\mathrm{x}+\mathrm{y}+3\mathrm{y}=6$.

2**)** **Aplicação**: Um fabricante de embalagens deve fabricar um lote de caixas retangulares de volume $V = 64\,\text{cm}^3$. Se o custo do material usado na fabricação da caixa é de R$ 0,50 por centímetro quadrado, determinar as dimensões da caixa que tornem mínimo o custo do material usado em sua fabricação.

Solução. Sejam x, y e z as dimensões da caixa, conforme a figura a seguir:



O volume da caixa é dado por: $V = xyz$

A sua área de superfície é: $A = 2xy + 2xz + 2yz$

O custo do material usado para a fabricação da caixa é dado por:

$$C(x, y, z) = 0{,}5.(2xy + 2xz + 2yz) = xy + xz + yz$$

Estamos, assim, diante do seguinte problema de otimização: $\begin{array}{l} \min C(x, y, z) = xy + xz + yz \\ s.a : xyz = 64 \end{array}$

A função lagrangeana, para esse problema, é dada por:

$$L(x, y, z, \lambda) = xy + xz + yz - \lambda(xyz - 64)$$

Derivando L em relação às variáveis x, y, z e λ e igualando a zero as derivadas, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} y + z - \lambda yz = 0 \\ x + z - \lambda xz = 0 \\ x + y - \lambda xy = 0 \\ -xyz + 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = \lambda yz \\ x + z = \lambda xz \\ x + y = \lambda xy \\ xyz = 64 \end{cases}$$

Da última equação, segue que: $x \neq 0$, $\text{y} \neq 0$ e $\text{z} \neq 0$.

Das três primeira equações, concluímos que $\lambda \neq 0$, pois em caso contrário teríamos $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Assim, sabendo que $\lambda \neq 0$ e isolando λ nas duas primeiras equações, obtemos as seguintes equações equivalentes:

$$\frac{x + z}{xz} = \frac{y + z}{yz} \Rightarrow (x + z)yz = (y + z)xz \Rightarrow xyz + yz^2 = xyz + xz^2 \Rightarrow yz^2 = xz^2 \Rightarrow y = x$$

Da mesma forma, trabalhando com a segunda e a terceira equação, temos que $y = z$.

Substituindo esses resultados na última equação, obtemos: $x = y = z = \sqrt[3]{64} = 4$

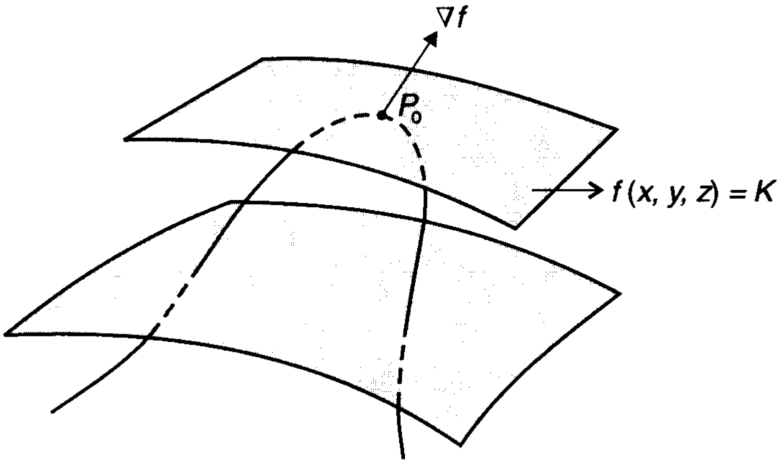
Portanto, o único candidato a extremante condicionado da função custo C(x, y, z) é o ponto (4, 4, 4). O custo de material correspondente é: C(4, 4, 4) = 48. Para verificar que é ponto de mínimo, tomemos, por exemplo: x = 4, y = 16 e z = 1, cujo custo é dado por: 4 . 16 + 4 . 1 + 16 . 1 = 84 reais => Ponto de máximo.

PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS E DUAS RESTRIÇÕES

Consideremos o seguinte problema de otimização: $\begin{array}{ll} Máx & f(x,y,z) \\ s.a: & g(x,y,z)=0 \\ & h(x,y,z)=0 \end{array}$

Para visualizarmos o método, nesse caso, vamos supor que a interseção das superfícies $g(x,y,z)=0$ e $h(x,y,z)=0$ seja uma curva C. Queremos determinar, então, um ponto de máximo, P_0, de f sobre C. Como nos casos anteriores, traçamos diversas superfície de nível $f(x,y,z)=k$ de f, observando os valores crescentes de k.

Observando a figura a seguir, vemos que, no ponto P_0, a curva C tangência a superfície de nível $f(x,y,z)=k$ de f.



Assim, $\nabla f(P_0)$ deve ser normal à curva C. Temos também que $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$ são normais à curva C. Portanto, no ponto P_0, os três vetores ∇f, ∇g e ∇h são coplanares e, então, existem números reais λ e μ tais que:

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g + \mu \cdot \nabla g$$

Observamos que, nessa argumentação geométrica, estamos supondo que os vetores ∇g e ∇h são linearmente independentes (L. I.), ou seja, tem direções diferentes, não são múltiplos.

Lembre-se: Dizer que os vetores ∇f, ∇g e ∇h são coplanares significa que os mesmos estão contidos num mesmo plano.

A seguir, temos o seguinte **teorema**: Seja $A \subset \Re^3$ um conjunto aberto. Suponhamos que $f(x,y,z)$ é diferenciável em A e que $g(x,y,z)$ e $h(x,y,z)$ têm derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em A. Seja $B=\{(x,y,z)\in A/\, g(x,y,z)=0 \text{ e } h(x,y,z)=0\}$. Suponhamos, também, que ∇g e ∇h são linearmente independentes em B. Se P_0 é um ponto extremante local de f em B, então existem números reais λ e μ tais que:

$$\nabla f(P_0) = \lambda \cdot \nabla g(P_0) + \mu \cdot \nabla g(P_0)$$

Com base neste teorema, podemos dizer que os candidatos a extremantes condicionados de f devem satisfazer a equação: $\nabla L = 0$,

onde a função lagrangeana L, nesse caso, é uma função de 5 (cinco) variáveis, dada por:

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) - \lambda \cdot g(x,y,z) - \mu \cdot h(x,y,z)$$

Exemplo:

1) Determinar o ponto da reta de intersecção dos planos $x + y + z = 2$ e $x + 3y + 2z = 12$ que esteja mais próxima da origem.

Solução:

Para simplificar os cálculos, vamos minimizar o quadrado da distância. Assim, temos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} &Min \quad x^2 + y^2 + z^2 \\ &s.a: \quad \mathrm{x + y + z - 2 = 0} \\ &\qquad\quad \mathrm{x + 3y + 2z - 12 = 0} \end{aligned}$$

A função lagrangeana L é dada por:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 2) - \mu \cdot (x + 3y + 2z - 12)$$

Derivando L em relação às variáveis x, y, z, λ e μ, vem:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda - \mu\,; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2y - \lambda - 3\mu\,; \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2z - \lambda - 2\mu\,;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x + y + z - 2) \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \mu} = -(x + 3y + 2z - 12)$$

Assim, a equação $\nabla L = 0$ nos fornece o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow 2x = \lambda + \mu \overset{1}{\Rightarrow} \\ 2y - \lambda - 3\mu = 0 \Rightarrow 2y = \lambda + 3\mu \overset{2}{\Rightarrow} \\ 2z - \lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow 2z = \lambda + 2\mu \overset{3}{\Rightarrow} \\ x + y + z = 2 \overset{4}{\Rightarrow} 2z + z = 2 \Rightarrow 3z = 2 \Rightarrow z = 2/3 \\ x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

$$(1) - (3) \Rightarrow 2x - 2z = -\mu \text{ e } (2) - (3) \Rightarrow 2y - 2z = -\mu \Rightarrow$$

$$2x + 2z = -2y + 2z \Rightarrow x - z = -y + z \Rightarrow x + y = 2z \text{ (substitui em (4))}$$

$$-\begin{cases} x + y = 4/3 \\ x + 3y = 12 - 4/3 \end{cases} \Rightarrow -2y = 4/3 - 12 + 4/3 \Rightarrow -6y = 4 - 36 + 4 \Rightarrow -6y = -28 \Rightarrow y = 14/3$$

$$x = 4/3 - 14/3 = -10/3$$

Assim, temos:

$$x = -\frac{10}{3}, y = \frac{14}{3}, z = \frac{2}{3}, \lambda = -\frac{44}{3} \text{ e } \mu = 8$$

Portanto, o ponto $\left(-\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$ é o único candidato a extremidade condicionado de f. Geometricamente, é fácil constatar que esse ponto constitui a solução do problema. Por outro lado,

$$f\left(-\frac{10}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cong 5{,}77 < f(-6, 2, 6) = \sqrt{76} \cong 8{,}72$$

Sugestão de atividade: Usar softwares matemático para resolver o sistema e para construir a representação geométrica, quando for possível.

LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS

Nos exercícios a seguir, use o método dos multiplicadores de Lagrange para encontrar os extremos indicados. Você pode supor que o extremo existe.

1) Determinar os pontos de máximos e/ou mínimos da função dada, sujeita às restrições indicadas:

a) $z = x^2 + y^2$; $x + y = 1$

b) $z = 4 - 2x - 3y$; $x^2 + y^2 = 1$

c) $z = 2x + y$; $x^2 + y^2 = 4$

d) $z = xy$; $2x^2 + y^2 = 16$

e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 9$

Resposta:

a) Ponto de mínimo => $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) Ponto de mínimo => $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ e Ponto de máximo => $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

c) Ponto de mínimo => $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e Ponto de máximo => $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

d) Pontos de mínimo => $\left(2, -2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2, 2\sqrt{2}\right)$ e Pontos de máximo => $\left(2, 2\sqrt{2}\right)$ e $\left(-2, -2\sqrt{2}\right)$

e) Ponto de mínimo => $(3, 3, 3)$

2) Encontre o valor máximo de $f(x, y) = xy$, sujeita á restrição $x + y = 1$.

Resposta: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

3) Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = xy$, sujeita á restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: Pontos de mínimo => $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e

Pontos de máximo => $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4) Encontre o valor mínimo da função $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeita á restrição $xy = 1$.

Resposta: $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5) Encontre o valor mínimo da função $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$, sujeita á restrição $2x + y = 22$.

Resposta: $f(9, 4) = 77$ (exemplo de que é mínimo f(11, 0) = 121 > 77 = f(9, 4)

6) Encontre o valor mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$, sujeita á restrição $x^2 + y^2 = 4$.

Resposta: $f(0, 2) = f(0, -2) = -4$

7) Seja $f(x, y) = 8x^2 - 24xy + y^2$. Encontre os valores máximo e mínimo da função dada, sujeita à restrição $8x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: $P_1(1/4, \sqrt{2}/2)$ e P_2 $(-1/4, -\sqrt{2}/2)$ são pontos de mínimos => $f(P_1) = f(P_2) = 1 - 3\sqrt{2}$

$P_3(-1/4, \sqrt{2}/2)$ e P_4 $(1/4, -\sqrt{2}/2)$ são pontos de mínimos => $f(P_3) = f(P_4) = 1 + 3\sqrt{2}$

8) Seja $f(x,y) = x^2 - 2y - y^2$. Encontre os valores máximo e mínimo da função dada, sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Resposta: Pontos de máximos => $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$; Ponto de mínimo => $f(0,1) = -3$

Nota: Essa função possui um ponto de sela em (0, -1) cujo valor funcional é 1.
Cuidado: Na resolução do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{2x} = \lambda \Rightarrow Se\ x \neq 0 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \dfrac{-2-2y}{2y} = \lambda \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Por outro lado, se $x = 0$, substituindo na restrição $(x^2 + y^2 = 1)$, temos: $y = \pm 1$.

9) Seja $f(x,y) = xy$. Encontre os valores máximo e mínimo da função dada, sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 8$.

Resposta: Pontos de máximos => $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$;

Ponto de mínimo => $f(-2,2) = f(2,-2) = -4$

10) Encontre o valor máximo de $f(x,y) = xy^2$, sujeita à restrição $x + y = 1$.

Resposta: (1/3, 2/3) => Ponto de máximo e (1, 0) => Ponto de mínimo => Valor máximo = 4/27

11) Seja $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$. Encontre o valor mínimo da função dada, sujeita à restrição $x + y = 15$.

Resposta: $f(8,7) = -18$

12) Seja $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 2y + 7$. Encontre o valor mínimo da função dada, sujeita à restrição $4x^2 + 4xy = 1$.

Resposta: f(-1/2, 0) = 11/2 => Valor mínimo, pois é maior por exemplo que f(1/2, 0) =19/2

13) Determinar o ponto do plano $3x + 2y + 4z = 12$ para o qual a função $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 5z^2$ tenha um valor mínimo.

Resposta: $f\left(\frac{30}{11}, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}\right) \cong 10{,}90 < f(0,0,3) = 45 \overset{Por\ exemplo}{\Rightarrow}$ Ponto $\left(\frac{30}{11}, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}\right)$

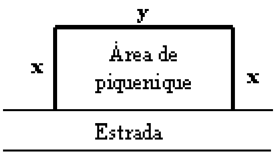
14) A reta t é dada pela intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $2x + 3y + z = 6$. Determinar o ponto da reta t cuja distância até a origem seja mínima.

Resposta: f$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ < f(1, 2, -2) por exemplo

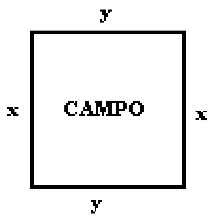
15) Achar os valores extremos de $z = 2xy$ sujeitos à condição $x + y = 2$.

Resposta: Ponto de máximo => $(1,1)$

16) O departamento de estrada está planejando construir uma área de piquenique para motoristas ao longo de uma grande auto-estrada. Ela deve ser retangular, com uma área de 5.000 metros quadrados, e cercada nos três lados não-adjacentes à auto-estrada. Qual é a quantidade mínima de cerca que será necessária para realizar o trabalho?

Solução: 	$Min\ \ f(x,y)=2x+y$ $s.a:\quad xy=5.000$ Portanto, a quantidade mínima é : 100 m + 50 m + 50 m = 200 m

17) Há 320 metros de cerca disponíveis para cercar um campo retangular. Como a cerca deve ser usada de tal forma que a área incluída seja a máxima possível?

Solução: 	$Máx\ \ f(x,y)=xy$ $s.a:\quad 2x+2y=320$ Portanto, o campo deve ser um quadrado com 80 metros de lado.

18) Deseja-se construir um aquário, na forma de um paralelepípedo retangular de volume 1 m^3 (1.000 L). Determine as dimensões do mesmo que minimizam o custo, sabendo que o custo do material usando na confecção do fundo é o dobro do da lateral e que o aquário não terá tampa.

Solução: $\begin{array}{l} Mín\ \ 2xy+2xz+2yz \\ s.a:\ \ xyz=1 \end{array}$, usando os multiplicadores de Lagrange.

Portanto, deve-se construir um cubo de aresta 1 m.

19) Projete uma caixa retangular de leite com largura x, comprimento y e altura z, que contenha 512 cm^3 de leite. Os lados da caixa custam 3 centavos/cm^2 e o topo e o fundo custam 5 centavos/cm^2. Ache as dimensões da caixa que minimizem o custo total. Qual é esse custo?

Solução: $\begin{array}{l} Mín\ \ 10\mathrm{xy}+6\mathrm{xz}+6\mathrm{yz} \\ s.a:\ \ xyz=512 \end{array}$, usando os multiplicadores de Lagrange. Portanto, as dimensões devem ser: Largura $\cong$ 6,75 cm; Comprimento $\cong$ 6,75 cm e Altura $\cong$ 11,24 cm. Em relação ao custo, temos: $C(6{,}75,\ 6{,}75,\ 11{,}24)=1.366{,}065\,\mathrm{centavos}=13{,}66\,\mathrm{reais}<\mathrm{C}(8,8,8)=1.408\,\mathrm{centavos}=14{,}08\,\mathrm{reais}$.

20) Encontre o volume máximo que uma caixa retangular pode ter, sujeita a restrição de que a área da superfície é 10 m^2. **Resposta**: $V\cong 2{,}15\ m^3$ ou 2.151 L 657 mL > 2 = V(1, 1, 2).

21) Determinar os pontos de máximos e mínimos da função dada, sujeita à restrição indicada: $f(x,y,z)=x+y$ e $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$.

Resposta: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ => Máximo e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ => Mínimo

22) Determinar os pontos de máximos e mínimos da função dada, sujeita às restrições indicadas:

$f(x,y,z)=x+y+z$ e $\begin{cases} g(x,y,z)=x^2+y^2=2 \\ h(x,y,z)=x+z=1 \end{cases}$

Resposta: $(0,\sqrt{2},1)$ => Máximo e $(0,-\sqrt{2},1)$ => Mínimo

23) **Aplicação**: Encontre o volume máximo que uma caixa retangular pode ter, sujeita a restrição de que a área da superfície é 10 m^2.

Solução:

$$V = xyz \text{ , como } A = 10\,\text{m}^2 \text{ e}$$

$$A = 2xy + 2xz + 2yz = 10 \Rightarrow xy + xz + yz = 5 \Rightarrow g(x, y, z) = xy + xz + yz - 5$$

Assim, devemos maximizar $V = xyz$ sujeito a $xy + xz + yz = 5$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz \text{ , } \frac{\partial V}{\partial y} = xz \text{ e } \frac{\partial V}{\partial z} = xy \Rightarrow \nabla V(x, y, z) = (yz, xz, xy)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y + z \text{ , } \frac{\partial g}{\partial y} = x + z \text{ e } \frac{\partial g}{\partial z} = x + y \Rightarrow \nabla g(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

$$\begin{cases} (yz, xz, xy) = \lambda(y + z, x + z, y + z) \\ xy + xz + yz = 5 \end{cases} \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} yz = \lambda(y + z) \\ xz = \lambda(x + z) \\ xy = \lambda(y + z) \\ xy + xz + yz = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{yz}{y + z} = \lambda \\ \dfrac{xz}{x + z} = \lambda \\ \dfrac{xy}{x + y} = \lambda \\ xy + xz + yz = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$^{*}\, x \neq 0, y \neq 0 \text{ e } z \neq 0$$

$$\frac{yz}{y + z} = \frac{xz}{x + z} \Rightarrow \frac{y}{y + z} = \frac{x}{x + z} \Rightarrow y.(x + z) = x.(y + z) \Rightarrow yx + yz = xy + xz \Rightarrow yz = xz \Rightarrow x = y \;\; (1)$$

$$\frac{xz}{x + z} = \frac{xy}{x + y} \Rightarrow \frac{z}{x + z} = \frac{y}{x + y} \Rightarrow z.(x + y) = y.(x + z) \Rightarrow zx + zy = yx + yz \Rightarrow zx = yx \Rightarrow z = y \;\; (2)$$

Substituindo (1) e (2) em $xy + xz + yz = 5$, temos:

$$y^2 + y^2 + y^2 = 5 \Rightarrow 3y^2 = 5 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

logo: $x = y = z = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

e o volume é:

$$V = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{125}{27}} \cong 2{,}1516574$$

ou seja:

$$V \cong 2{,}152 \text{ m}^3 \text{ ou } 2.151 \text{ L } \; 657 \text{ mL.}$$

24) Determinar os pontos de máximos e mínimos da função dada, sujeita à restrição indicadas: $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = y - x - 1$

Solução:

$$\text{Como } \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, 2y) = \lambda(-1,1) \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y = \lambda \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = \dfrac{\lambda}{2} \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = \frac{1}{2}$$

Assim, $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

25) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$$\text{Como } \begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$1^{\underline{a}} \text{ Parte) } (x \neq 0) \begin{cases} 2x = -\lambda \cdot 2x \Rightarrow \lambda = 1 \\ -2y = \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ -2y = 2y \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 + 0 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Assim, os pontos são $P_1(1,0)$ e $P_2(-1,0)$

$$\left.\begin{matrix} f(1,0) = 1 - 0 = 1 \\ f(-1,0) = 1 - 0 = 1 \end{matrix}\right\} \text{ambos pontos de máximos}$$

$$2^{\underline{a}} \text{ Parte) } (x = 0) \begin{cases} 2x = \lambda \cdot 2x \\ -2y = \lambda \cdot 2y \Rightarrow \lambda = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = -2x \Rightarrow x = 0 \\ \lambda = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 + 0 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Assim, os pontos são $P_3(0,1)$ e $P_4(0,-1)$ => $\left.\begin{matrix} f(0,1) = 0 - 1 = -1 \\ f(0,-1) = 0 - 1 = -1 \end{matrix}\right\}$ ambos pontos de mínimos

INTERPRETAÇÃO PARA O MULTIPLICADOR DE LAGRANGE λ

Podemos resolver a maioria dos problemas de otimização condicionados pelo método dos multiplicadores de Lagrange sem obter efetivamente um valor numérico para o multiplicador de Lagrange λ. Em alguns problemas, contudo, podemos querer conhecer λ. Isto seria devido a λ ter uma interpretação útil.

Suponha que M seja o valor máximo (ou mínimo) de $f(x,y)$, sujeita à restrição $g(x,y) = k$. O multiplicador de Lagrange λ é a taxa de variação de M em relação à k. Isto é: $\lambda = \dfrac{dM}{dk}$

Assim, $\lambda \cong$ variação em M resultante de um aumento de 1 unidade em k

Lembre-se: Nosso objetivo é: $\begin{matrix} Máx \;\; f(x,y) \\ s.a: \;\; g(x,y) = k \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} Min \;\; f(x,y) \\ s.a: \;\; g(x,y) = k \end{matrix}$