impa 60 anos 1952 - 2012

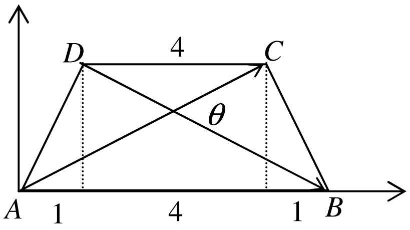
Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013
Avaliação – Soluções

1)

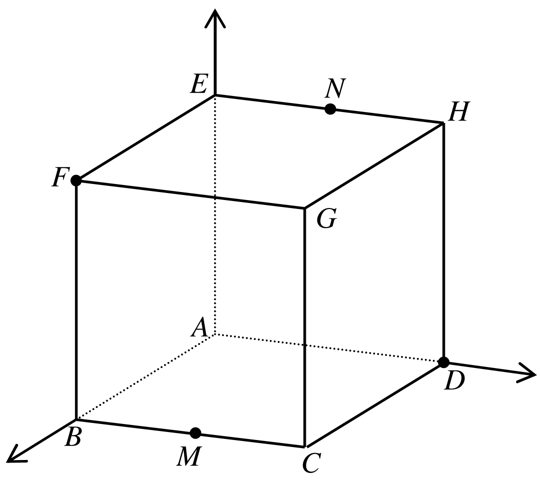


Observando a figura e como $AD = \sqrt{10}$ então a altura do trapézio é igual a 3.
Introduzindo o sistema de coordenadas como na figura acima temos:
$A = (0,\ 0)$, $B = (6,\ 0)$, $C = (5,\ 3)$ e $D = (1,\ 3)$.
Assim, $\overrightarrow{AC} = (5, 3)$ e $\overrightarrow{DB} = (5, -3)$. Cada um desses vetores tem módulo $\sqrt{25+9} = \sqrt{34}$.
Portanto,

$$\cos\theta = \frac{5\cdot 5 + 3\cdot(-3)}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{34}} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

Obs: $\theta \cong 62^{\circ}$.

2) Considerando o sistema de coordenadas ilustrado na figura ao lado, e adotando o comprimento da aresta como igual a 2 unidades temos:



$M = (2,\ 1,\ 0)$
$N = (0,\ 1,\ 2)$
$F = (2,\ 0,\ 2)$
$D = (0,\ 2,\ 0)$
Assim, $\overrightarrow{MN} = (-2, 0, 2)$ e $\overrightarrow{FD} = (-2, 2, -2)$.
O produto interno desses vetores é
$4 + 0 - 4 = 0$.
Portanto, retas FD e MN são perpendiculares.

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

O sistema é indeterminado e é equivalente a $\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ \quad y-3z=-2 \end{cases}$

Com $z=0$ encontramos $y=-2$ e $x=7$.
Com $z=1$ encontramos $y=1$ e $x=-1$.
Assim, duas soluções são representadas pelos pontos $(7,\ -2,\ 0)$ e $(-1,\ 1,\ 1)$.

4)

Por inspeção, descobrimos que 1 é raiz. Aplicamos o algoritmo de Briot-Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & 1 & 9 & -10 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 & 10 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 10 & 0 \end{array}$$

Continuamos buscando raízes racionais de $x^3 + x + 10$, que terão que ser inteiras, pesquisando os divisores de 10, ou seja, $\pm 1, \pm 2, \pm 5 e \pm 10$, Sempre aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini (exceto talvez para ± 1). Descobrimos que -2 é raiz.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & 10 \\ -2 & & -2 & 4 & -10 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

Finalmente, resolvemos a equação do segundo grau $x^2 - 2x + 5 = 0$, utilizando a conhecida fórmula ou então completando o quadrado: $x^2 - 2x + 1 = -5 + 1 = -4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -4 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 2i \Leftrightarrow x = 1 \pm 2i$. Assim, o conjunto solução da equação proposta é $\{1, -2, 1+2i, 1-2i\}$.