

## Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

### PAPMEM Janeiro 2013

#### Matrizes Professor Elon Lima

#### Soluções

1. Se a matriz é simétrica, temos o trinômio

$$\det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda - b^2, \text{ cujo discriminante é } \Delta = (a + c)^2 + b^2$$

portanto  $\Delta \geq 0$  e a equação correspondente tem raízes reais.

2. Representando os lados do triângulo pelos vetores  $u, v, u - v$ , os comprimentos dos seus lados são  $a = |u|, b = |v|$  e  $c = |u - v|$ . Sua área  $A$  cumpre

$$A^2 = \frac{\lambda}{4} \det \begin{bmatrix} |u|^2 & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & |v|^2 \end{bmatrix}$$

Levando em conta que  $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2 \langle u, v \rangle$  e portanto  $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)$ , temos

$$4A^2 = \det \begin{bmatrix} a^2 & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) & b^2 \end{bmatrix} = a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Logo

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - c^2)^2}.$$

3. Uma matriz simétrica  $3 \times 3$  tem a forma  $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ , logo seu determinante, pelo desenvolvimento de Laplace via primeira coluna é igual a  $abc - bac = 0$ . Para matrizes  $2 \times 2$ , o resultado não vale pois  $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 1$ .

4. As matrizes  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  têm respectivamente postos 0, 1, 2 e 3.

O posto da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$  é 2 pois suas duas primeiras linhas são independentes mas a terceira é combinação linear das duas primeiras. Mais explicitamente, se chamarmos essas linhas de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ , teremos  $L_3 = 2L_2 - L_1$ .