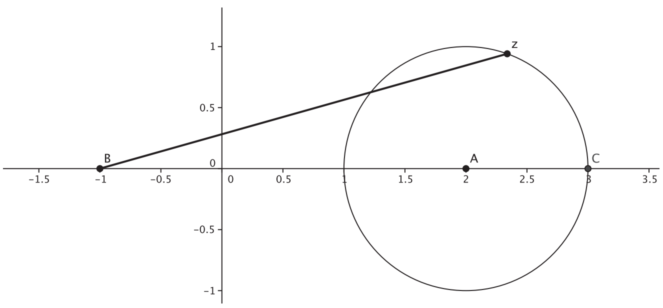
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013

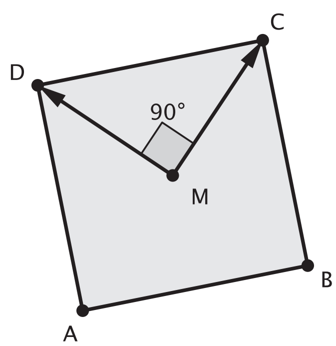
Soluções - Números Complexos

1. Temos $x^4 - 10x^2 + 25 = -169 + 25$, ou seja, $(x^2 - 5)^2 = -144$. Como as raízes quadradas de -144 são $12i$ e $-12i$, deduzimos que $x^2 = 5 \pm 12i$. Agora, para calcular as raízes quadradas de $5 \pm 12i$, podemos usar a fórmula de transfomação de radicais duplos ou então observar que $5 \pm 12i = 9 - 4 \pm 2 \cdot 3 \cdot 2i = (3 \pm 2i)^2$. Logo as quatro raízes da equação são $3+2i, 3-2i, -3-2i, -3+2i$.

2. $|z-2| = 1$ significa que a imagem de z dista 1 do ponto $A(2,0)$, logo pertence à circunferência de centro A e raio 1. $|z+1|$ representa a distância da imagem de z à imagem do complexo -1, o ponto $B(-1,0)$. O ponto da circunferência mais distante de B deve pertencer à reta AB, logo é o ponto $C(3,0)$. Como $BC = 4$, o valor máximo de $|z+1|$ é igual a 4.



3. Seja M o ponto médio de AC, ou seja $M\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+8}{2}\right) = (4,6)$. Considerando os vértices A, B, C, D no sentido trigonométrico, temos que o vetor $\overrightarrow{MD}$ é o resultado da rotação de $90°$ do vetor $\overrightarrow{MC}$, no sentido trigonométrico. Assim, identificando pontos e vetores com seus correspondentes afixos em $\mathbb{C}$, temos $\overrightarrow{MD} = i \cdot \overrightarrow{MC}$, ou seja, $D - M = i(C - M) \Leftrightarrow D = 4 + 6i + i(5 + 8i - 4 - 6i) = 2 + 7i$, ou seja, $D(2,7)$. Agora, uma das várias formas de calcular B é $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow B - A = C - D \Leftrightarrow$ $B = (3,4) + (5,8) - (2,7) = (6,5)$.



4. Temos $x^2-(2\cos\theta)x+1=0$. Resolvendo a equação do segundo grau, obtemos $\Delta=4(\cos^2\theta-1)<0$. Assim, $x=\cos\theta\pm i\sqrt{1-\cos^2\theta}=\cos\theta\pm i\cdot\operatorname{sen}\theta$. Ou seja, x é igual a $\operatorname{cis}\theta$ ou a seu conjugado, $\operatorname{cis}(-\theta)$. Como esses complexos são inversos um do outro, em qualquer caso teremos $x^n+\dfrac{1}{x^n}=(\operatorname{cis}\theta)^n+(\operatorname{cis}(-\theta))^n=\operatorname{cis}n\theta+\operatorname{cis}(-n\theta)=2\cos n\theta$.