Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013

Soluções - Polinômios II

1. Substituindo $x = \alpha^2 - 2$ no lado esquerdo da equação, e usando o fato de que $\alpha^3 = 3\alpha - 1$, obtemos $\left(\alpha^2-2\right)^3 - 3\left(\alpha^2-2\right) + 1 = \alpha^6 - 6\alpha^4 + 12\alpha^2 - 8 - 3\alpha^2 + 6 + 1 = (3\alpha-1)^2 - 6\alpha(3\alpha-1) - 15\alpha^2 - 1 = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 - 18\alpha^2 + 6\alpha + 9\alpha^2 - 1 = 0$, logo $\alpha^2 - 2$ é raiz da equação. Para ver que é, de fato, *outra* raiz, basta observar que se $\alpha^2 - 2 = \alpha$, então $\alpha = 2$ ou $\alpha = -1$, mas nenhum desses dois valores representa uma raiz de $x^3 - 3x + 1 = 0$.

2. Como 7 está bem próximo de 8, cuja raiz cúbica vale 2, podemos obter uma boa aproximação de $\sqrt[3]{9}$ já na primeira interação do método de Newton, começando com a aproximação $x_0 = 2$. Para isso, consideramos a função $f(x) = x^3 - 7$, e calculamos a aproximação x_1 fazendo a interseção da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, f(2)) = (2, 1)$ com o eixo das abscissas. O coeficiente angular desta tangente é igual a $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, logo $\dfrac{0-(1)}{x_1 - 2} = 12$, e obtemos $x_1 = 1\frac{11}{12} = 1,91666\ldots$, aproximação correta até a segunda casa decimal.

3. Como o polinômio tem coeficientes reais e i e $1+i$ são raízes, os conjugados $-i$ e $1-i$ também são raízes. Isto significa que o polinômio é divisível por $(x^2+1)(x^2-2x+2) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$. Façamos a divisão.

$$
\begin{array}{r|r}
 & x^3 \quad -4x^2 \quad +4x-3 \\ \hline
x^4-2x^3+3x^2-2x+2 & x^7-6x^6+15x^5-25x^4+28x^3-25x^2+14x-6 \\
 & -x^7+2x^6 \quad -3x^5 \quad +2x^4 \quad -2x^3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & -4x^6+12x^5-23x^4+26x^3-25x^2 \qquad\qquad\quad \\
 & 4x^6 \quad -8x^5+12x^4 \quad -8x^3 \quad +8x^2 \qquad\qquad\quad \\ \cline{2-2}
 & 4x^5-11x^4+18x^3-17x^2+14x \qquad \\
 & -4x^5 \quad +8x^4-12x^3 \quad +8x^2 \quad -8x \qquad \\ \cline{2-2}
 & -3x^4 \quad +6x^3 \quad -9x^2 \quad +6x-6 \\
 & 3x^4 \quad -6x^3 \quad +9x^2 \quad -6x+6 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

Agora, antes de tentar a fórmula de Cardano, vale a pena pesquisar possíveis raízes inteiras (qualquer raiz racional deverá ser inteira) do quociente, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$. Os únicos candidatos são os divisores de -3, ou seja, $1, -1, 3, -3$. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, descobrimos que a única raiz inteira é 3.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 4 & -3 \\
3 & & 3 & -3 & 3 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Para terminar, basta resolver a equação do segundo grau $x^2 - x + 1 = 0$, cujas raízes são $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, o conjunto-solução da equação original é $\left\{3, i, -i, 1+i, 1-i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.