Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013

Sistemas Lineares

Professor Paulo Cezar

Soluções

1. Escalonando o sistema, temos

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & -1 & 5\\ 3 & 4 & 1 & c\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 1 & -5 & c-6\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & c-7\end{bmatrix}$$

Para que o sistema tenha solução, deve-se ter c–7 = 0, ou seja, c = 7. O conjunto de soluções é uma reta do espaço (cada equação é combinação linear das outras duas, mas os planos correspondentes a cada equação não são paralelos entre si).

2. Os pontos da primeira reta são da forma (t, t, 2t), onde t ∈ R. Os pontos da segunda reta são da forma (1+3u, 3 – 3u, 5 – 3u), onde u ∈ R. As retas se intersectam se e somente se o sistema

$$\begin{cases} t = 1+3u \\ t = 3-3u \\ 2t = 5-3u \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (por exemplo por substituição, verificamos que t = 2, u = 1/3 é a única solução. Logo, as retas se intersectam no ponto (2, 2, 4).

3. Para encontrar as quantidades de cada liga, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} 700x + 800y + 750z = 700 \\ 200x + 100y + 100z = 150 \\ 100x + 100z + 150z = 100 \end{cases}$$

Reordenando as equações e resolvendo por escalonamento, obtemos

$$\begin{bmatrix}100 & 100 & 150 & 100\\ 200 & 100 & 100 & 150\\ 700 & 800 & 750 & 750\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}100 & 100 & 150 & 100\\ 0 & -100 & -200 & -50\\ 0 & 100 & -300 & 50\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}100 & 100 & 150 & 100\\ 0 & -100 & -200 & -50\\ 0 & 0 & -500 & 0\end{bmatrix}$$

O sistema tem solução única. Temos:

z = 0

-100y -200z = -50 $\Rightarrow$ y = 0,5

100 x + 100 y + 150 z = 100 $\Rightarrow$ x = 0,5

Logo, para produzir a liga desejada, deve-se utilizar 500 kg da liga I, 500 kg da liga II e nada da liga III.

Para a outra liga, só muda o lado direito da equação (pode-se aproveitar, portanto, o escalonamento que já foi feito). Temos:

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 200 & 100 & 100 & 150 \\ 700 & 800 & 750 & 700 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 0 & -100 & -200 & -150 \\ 0 & 100 & -300 & -350 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 & 100 & 150 & 150 \\ 0 & -100 & -200 & -50 \\ 0 & 0 & -500 & -500 \end{bmatrix}$$

Temos

$-500\ z = -500 \Rightarrow z = 1$

$-100y - 200z = -50 \Rightarrow y = -1{,}5$

$100x + 100y + 150z = 150 \Rightarrow x = 1{,}5$

Embora o sistema tenha solução, ela envolve quantidades negativas de uma das ligas, o que não é fisicamente realizável.