Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

PAPMEM – Janeiro 2013

Geometria Analítica no Espaço
Professor Eduardo Wagner

Soluções

1) a) O plano perpendicular ao vetor $v=(1,\ 2,\ 3)$ tem equação $x+2y+3z=d$. Para que P pertença a esse plano deve-se ter $d=3$.
A equação do plano é $x+2y+3z=3$.

1) b) Os pontos de interseção deste plano com os eixos são $(3,\ 0,\ 0)$, $\left(0,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ e $(0,\ 0,\ 1)$.

O volume do tetraedro que tem esses três vértices mais a origem é:

$$V=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot \frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{4}.$$

2) Sejam:
Eixo X – Direção leste-oeste
Eixo Y – Direção norte-sul
Eixo Z – Direção cima-baixo
Escrevendo os movimentos na escala 1/100 temos:

$$(0,\ 0,\ 5)+(0,\ 13,\ 0)+(8,\ 0,\ 0)+(0,\ 0,\ 3)+(0,\ -4,\ 0)+(-2,\ 0,\ 0)+(0,\ 0,\ -1)=(6,\ 9,\ 7)$$

O módulo do vetor $(6,\ 9,\ 7)$ é $\sqrt{166}=12{,}88$. De acordo com a escala, a distância entre A e B é de 1288m, ou seja, aproximadamente 1290m.

3) Qualquer plano pode ser representado por uma equação do tipo $Ax+By+Cz=1$. Como os três pontos devem pertencer a esse plano devemos ter:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B+C=1 \\ -A+C=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{3}{4}$ e $C=\frac{5}{4}$. A equação do plano é:

$\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}z=1$ ou $x+3y+5z=4$.

4) Considere o cubo com os seguintes vértices e faça uma figura.

A = (0, 0, 0), B = (2, 0, 0), C = (2, 2, 0), D = (0, 2, 0),

E = (0, 0, 2), F = (2, 0, 2), G = (2, 2, 2), H = (0, 2, 2).

a) Sejam $\overrightarrow{AG}=(2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{EC}=(2,\ 2,\ 0)-(0,\ 0,\ 2)=(2,\ 2,-2)$.

Como $\left|\overrightarrow{AG}\right|=\left|\overrightarrow{EC}\right|=2\sqrt{3}$ o cosseno do ângulo θ entre essas diagunais é

$$\cos\theta=\frac{2\cdot 2+2\cdot 2+2(-2)}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}.$$

b) O ponto médio de BC é $M=(2,\ 1,\ 0)$. O ponto médio de DH é $N=(0,\ 2,\ 1)$.

Temos então $\overrightarrow{MN}=(-2,\ 1,\ 1)$. A distância entre M e N é $\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

c) Sendo $\overrightarrow{AG}=(2,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{BD}=(0,\ 2,\ 0)-(2,\ 0,\ 0)=(-2,\ 2,\ 0)$ temos que o produto interno desses vetores é: $2\cdot(-2)+2\cdot 2+2\cdot 0=0$ o que mostra que essas retas são ortogonais.

d) Temos $\overrightarrow{FD}=(2,\ -2,\ 2)$, $\overrightarrow{BG}=(0,\ 2,\ 2)$ e $\overrightarrow{BE}=(-2,\ 0,\ 2)$.

Como $\left\langle \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{BG}\right\rangle=0$ e $\left\langle \overrightarrow{FD},\ \overrightarrow{BE}\right\rangle=0$ então FD é ortogonal a BG e a BE. Logo, FD é perpendicular ao plano BGE.