# Combinatória 2

Prof.Luciano Monteiro de Castro

**1.** Selecionam-se 5 cartas de um baralho comum com 52 cartas. De quantas maneiras pode-se formar;

(a) Um par? (exatamente duas cartas com o mesmo número ou figura)

(b) Uma trinca? (exatamente três cartas com o mesmo número ou figura)

(c) Um par e uma trinca? (*fullhand* do pôquer)

(d) Dois pares?

**2.** De quantas maneiras podemos formar uma fila com 7 homens e 5 mulheres, todos com alturas diferentes, de forma que os homens entre si e as mulheres entre si estejam em ordem crescente de altura?

**3.** Há 10 pessoas para telefonar e apenas 3 cabines telefônicas. De quantas maneiras essas pessoas podem formar filas diante das cabines? (Admita a possibilidade de haver filas vazias).

**4.** Determine o número de soluções inteiras não negativas para a inequação

$$x + y + z \leq 10.$$

## Soluções

1. (a) Escolhe-se o número ou figura que se repetirá: $13$ possibilidades. Depois, escolhem-se 2 dos 4 naipes: $\binom{4}{2} = 6$ possibilidades. Finalmente, escolhem-se as outras 3 cartas sem repetir número ou figura: $48$ possibilidades para a primeira carta, $44$ para a segunda (número ou figura diferente da primeira), $40$ para a terceira. Cada grupo de 3 cartas assim escolhido foi contado $3! = 6$ vezes, logo a resposta é

$$13 \times 6 \times \frac{48 \times 44 \times 40}{6} = 1.098.240.$$

   (b) Procedendo de forma análoga ao item anterior obtemos

$$13 \times \binom{4}{3} \times \frac{48 \times 44}{2} = 54.912.$$

   (c) Escolhe-se o par: $13 \times 6$ possibilidades (como acima). Escolhe-se a trinca com número ou figura diferente do par: $12 \times 4$ possibilidades. Total:

$$13 \times 6 \times 12 \times 4 = 3.744.$$

   (d) Primeiro par: $13 \times 6$ possibilidades (como antes). Segundo par: $12 \times 6$ possibilidades (número ou figura diferente do anterior). Agora, no entanto, cada conjunto de dois pares foi contado duas vezes, pois qualquer par pode ser o primeiro ou o segundo. Escolhidos os pares, escolhe-se uma outra carta sem repetir número ou figura: $44$ possibilidades. Logo o total é:

$$\frac{13 \times 6 \times 12 \times 6}{2} \times 44 = 123.552$$

2. Há uma bijeção entre o conjunto das possíveis filas e os anagramas formados com 7 letras $\mathsf{H}$ e 5 letras $\mathsf{M}$: Dada uma fila, em cada posição do anagrama colocamos $\mathsf{H}$ se a pessoa naquela posição da fila é homem e $\mathsf{M}$ se é mulher. Dado um anagrama, em cada posição da fila colocamos o homem mais baixo que ainda não tiver entrado na fila se a letra naquela posição do anagrama é $\mathsf{H}$, e a mulher mais baixa que ainda não tiver entrado na fila se for $\mathsf{M}$. Assim, o número de filas é igual ao número de anagramas:

$$\frac{12!}{7! \times 5!} = 792.$$

3. A cada pessoa associamos uma letra diferente do alfabeto, e formamos um anagrama com essas 10 letras e dois símbolos *separadores* | , | . Há uma bijeção entre o número de anagramas e o número de maneiras de formar as filas, bastando considerar os três pedaços do anagrama definidos pelos separadores como as três filas (que podem ser vazias). Assim, a resposta é:

$$\frac{12!}{2!} = 239.500.800.$$

4. Seja $w = 10 - x - y - z$. Se $(x, y, z)$ é solução da inequação, $w$ é um número inteiro não negativo. Reciprocamente, se $x + y + z + w = 10$ e $x, y, z, w$ são inteiros não negativos, então $(x, y, z)$ é solução da inequação. Para resolver esta última equação, consideramos anagramas formados por 10 símbolos *unitários* e 3 sinais '+', logo a resposta é:

$$\frac{13!}{10!3!} = 286.$$