impa

instituto nacional de matemática pura e aplicada

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação

GOVERNO FEDERAL BRASIL PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

PAPMEM – Janeiro/2014

Função Exponencial

Professor Ledo Vaccaro

Soluções

1) Resolução

<u>Às 9h 30min</u>

9h	9h 30min	10h	
B	x	$2B$	$\rightarrow$ P.G.

$x^2 = B \cdot 2B = 2B^2 \Rightarrow x = B\sqrt{2} = B \cdot 2^{1/2}$

<u>Às 9h 15min</u>

9h	9h 15min	9h 30min	9h 45min	10h	
B	x	_____	_____	$2B$	$\rightarrow$ P.G.

$2B = B \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{2}$

$x = B\sqrt[4]{2} = B \cdot 2^{1/4}$

<u>Às 9h 1min</u>

9h	9h 1min	. . .	9h 59min	10h	
B	x	_____	_____	$2B$	$\rightarrow$ P.G.

$2B = B \cdot q^{60} \Rightarrow q = \sqrt[60]{2} = 2^{1/60}$

$x = B\sqrt[60]{2} = B \cdot 2^{1/60}$

Às 11h 24min

$F(t) = B\cdot 2^{t/60}$, F é a função que dá o número de bactérias na colônia t minutos após às 9h.

Às 11h 24min, t = 144mim após 9h

$F(144) = B\cdot 2^{144/60} = B\cdot 2^{12/5} = B\sqrt[5]{2^{12}} = 4B\sqrt[5]{4}$

2A) Resolução

$2^x = 3^{kx} \Rightarrow \log 2^x = \log 3^{kx} \Rightarrow x\cdot\log 2 = kx\cdot\log 3$ (1)

Para x = 0, a igualdade (1) se verifica seja qual for o valor de k. Para qualquer $x \neq 0$, tem-se:

$\log 2 = k\cdot\log 3 \Rightarrow k = (\log 2)/(\log 3) = \log_3 2$

2B) Resolução

$a^{mx} = b^{nx} \Rightarrow \log a^{mx} = \log b^{nx} \Rightarrow mx\cdot\log a = nx\cdot\log b$ (2)

Para x = 0, a igualdade (2) se verifica sejam quais forem os valores de m e de n.

Para qualquer $x \neq 0$, tem-se:

$m\cdot\log a = n\cdot\log b \Rightarrow m = n\cdot(\log b)/(\log a) = n\cdot\log_a b$ ou $n = m\cdot(\log a)/(\log b) = m\cdot\log_b a$

3) Resolução

Consideremos um intervalo de tempo **r**. Escolhamos, a título de exemplo, esse intervalo de tal modo que seja o necessário para que 10% da mistura do balde com groselha seja substituída por água. Vamos criar uma tabela com a quantidade de groselha no balde para cada novo intervalo **r** decorrido.

0 ...... V_0

r ...... $\frac{9}{10}V_0$

2r ...... $\frac{9}{10} x \frac{9}{10} V_0 = \frac{81}{100} V_0$

3r ...... $\frac{9}{10} x \frac{81}{100} V_0 = \frac{729}{1000} V_0$

4r ...... $\frac{9}{10} x \frac{729}{1000} V_0 = \frac{6561}{10000} V_0$

. . . .

nr ...... $\left(\frac{9}{10}\right)^n V_0$

<u>Função Exponencial</u>

$$f(x) = A_0 a^{kx}$$

$$f(r) = A_0 a^{kr}$$
$$f(2r) = A_0 a^{2kr} = A_0 (a^{kr})^2$$
$$f(3r) = A_0 a^{3kr} = A_0 (a^{kr})^3$$
$$f(4r) = A_0 a^{4kr} = A_0 (a^{kr})^4$$

. . . .

Notemos que, enquanto os intervalos de tempo crescem em P.A., a quantidade de groselha presente no balde decresce em P.G. Esse comportamento caracteriza uma função exponencial.

Assim, a função que caracteriza a quantidade de groselha em função do tempo é uma exponencial:

$$f(t) = a^{kt}$$

em que V_0 é a quantidade inicial de groselha. Tomemos para unidade de volume o balde. Desse modo faremos V_0= 1.

Na expressão da função exponencial, **a** é uma base. Qual a base que escolheremos para construir nossa função? Essa escolha não afetará o resultado.

Podemos obter uma mesma exponencial, usando diferentes bases e escolhendo adequadamente os valores de **k**.

Escolhamos para base a = 10. A função que descreve a quantidade de groselha no balde com o passar do tempo fica assim:

$$f(t) = 10^{kt}$$

Precisamos encontrar o valor de **k**. Se soubermos a quantidade de groselha num determinado instante, conseguiremos obter **k**. Sabemos que, decorrido o período no qual os operários permaneciam trabalhando, a quantidade de groselha descia a 20% da quantidade inicial, ou seja, $\frac{1}{5}.V_0 = \frac{1}{5}.1 = \frac{1}{5}$. Vamos tomar esse período de trabalho como unidade de tempo. Assim, f(1) = $\frac{1}{5}$. Agora podemos calcular **k**:

$$f(1) = 10^k = \frac{1}{5} \Rightarrow \log 10^k = \log\frac{1}{5} \Rightarrow k = -\log 5$$

Chegamos a $\boxed{f(t) = 10^{-t\log 5}}$.

Chamemos de **T** o período de descanso dos trabalhadores. Como tomamos por unidade de tempo o período de trabalho, se o relógio de ponto funcionasse corretamente, ou seja, 8 horas de trabalho e 16 horas de descanso, **T** seria igual a 2. Como sabemos que "o relógio não era honesto", **T** será menor que 2. Decorrido **T**, a quantidade de groselha é de 10% da inicial, ou seja, $\frac{1}{10}$ de um balde.

$$f(T) = 10^{-T\log 5} = \frac{1}{10} \Rightarrow \log 10^{-T\log 5} = \log\frac{1}{10} \Rightarrow -T\log 5 = -1 \Rightarrow T = \frac{1}{\log 5}$$

Calculando $\frac{1}{\log 5}$: $\boxed{T = 1{,}43}$

Se somarmos o período de trabalho com o de descanso, temos que encontrar 24 horas. Chamando de **h** a quantidade de horas do período de trabalho:

$$h + 1{,}43h = 24 \Rightarrow h = \frac{24}{2{,}43} \Rightarrow \quad \boxed{h = 9{,}88}$$

Os operários passavam cerca de 10 horas por dia trabalhando e 14 horas descansando.

Os trabalhadores faziam 2 horas extras por dia.