PAPMEM – Janeiro/2014

Função Quadrática

Professor Ledo Vaccaro

Soluções

1A) Resolução

As coordenadas dos pontos do lugar geométrico procurado são tais que

$x = -\frac{m}{10}$ e $y = -\frac{m^2-4\cdot5\cdot3}{4\cdot5} = -\frac{m^2-60}{20} \Rightarrow m = -10x$ e $20y = -m^2 + 60 \Rightarrow 20y = -(-10x)^2 + 60$

$\Rightarrow 20y = -100x^2 + 60 \Rightarrow y = -5x^2 + 3$

O lugar geométrico procurado é a parábola de equação $y = -5x^2 + 3$.

1B) Resolução

$x = -\frac{m}{2a}$ e $y = -\frac{m^2-4ac}{4a} \Rightarrow m = -2ax$ e $4ay = -m^2 + 4ac \Rightarrow 4ay = -(-2ax)^2 + 4ac$

$\Rightarrow 4ay = -4a^2x^2 + 4ac \Rightarrow y = -ax^2 + c$

A equação do lugar geométrico procurado é $y = -ax^2 + c$, uma parábola de vértice $(0, c)$.

2A) Resolução

Os vértices do quadrado são $(-1, -1)$, $(7, -1)$, $(7, 7)$ e $(-1, 7)$. O vértice da parábola é o ponto médio do lado do quadrado com extremidades em $(-1, -1)$ e $(7, -1)$, ou seja, o vértice da parábola é $(3, -1)$.

$x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow b = -6a$

A parábola tem equação $y = ax^2 - 6ax + c$ e passa pelos pontos $(-1, 7)$ e $(7, 7)$.

$(-1, 7) \rightarrow 7 = a + 6a + c = 7a + c \Rightarrow c = 7 - 7a$ (1)

$(3, -1) \rightarrow -1 = 9a - 18a + c = -9a + c$ (2)

Substituindo (1) em (2):

$-1 = -9a + 7 - 7a = -16a + 7 \Rightarrow a = 1/2$

$c = 7 - 7\cdot(1/2) = 7/2$

$b = -6\cdot(1/2) = -3$

A parábola procurada tem equação $y = (1/2)x^2 - 3x + 7/2$

2B) Resolução

Inicialmente, tomemos $a > 0$.

Sendo (x_v, y_v) o vértice da parábola gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, e d o lado do seu quadrado característico, temos:

$f(x_v + \frac{d}{2}) = y_v + d$

$a\left(-\frac{b}{2a} + \frac{d}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + \frac{d}{2}\right) + c = \frac{4ac - b^2}{4a} + d$

$a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{bd}{2a} + \frac{d^2}{4}\right) - \frac{b^2}{2a} + \frac{bd}{2} + c = c - \frac{b^2}{4a} + d$

$\frac{b^2}{4a} - \frac{bd}{2} + \frac{ad^2}{4} - \frac{b^2}{2a} + \frac{bd}{2} = -\frac{b^2}{4a} + d$

$\frac{a}{4}d^2 - d = 0 \Rightarrow d = 0$ ou $d = 4/a$

$d = 0$ não serve como resposta, pois reduz o quadrado a um ponto. Portanto, o único valor de d é $4/a$, e isso garante a unicidade do quadrado característico.

Para $a < 0$, deve-se fazer $f(x_v + \frac{d}{2}) = y_v - d$, e o desenvolvimento é análogo.

3A) Resolução

$V(p) = -kp^2 + 50.000kp$

$p_{\text{máximo}} = -\frac{50.000k}{2\cdot(-k)} = 25.000$ pessoas

3B) Resolução

$V(p) = -kp^2 + 50.000kp$

$100 = -k\cdot 100^2 + 50.000k\cdot 100$

$1 = -k\cdot 100 + 50.000k \Rightarrow k = -\frac{1}{49.900}$

$V_{\text{máximo}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{50.000^2\cdot(-k)^2}{4(-k)} = \frac{5.000^2\cdot 10^2\cdot k^2}{4k} = \frac{25.000.000\cdot 100}{4} \cdot \frac{1}{49.900} \cong \frac{25.000.000}{2.000}$

$V_{\text{máximo}} = 12.500$ pessoas/hora