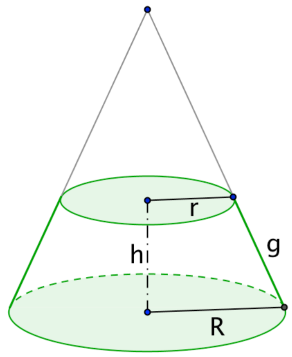
Volumes – Exercícios – Soluções



1)
Do cone original de altura *x* foi retirado um cone de altura *y*. Assim, $x - y = h$.

O volume do tronco de cone é a diferença entre os volumes desses dois cones:

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 x - \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 y$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 (h+y) - \frac{1}{3}\cdot \pi r^2 y = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 h + \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 y - \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 y$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 h + \frac{1}{3}\cdot \pi (R^2 - r^2) y$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 h + \frac{1}{3}\cdot \pi (R+r)(R-r) y$$

Da semelhança entre os dois cones temos $\frac{R}{x} = \frac{r}{y} = \frac{R-r}{h}$, ou seja, $(R-r)y = rh$.

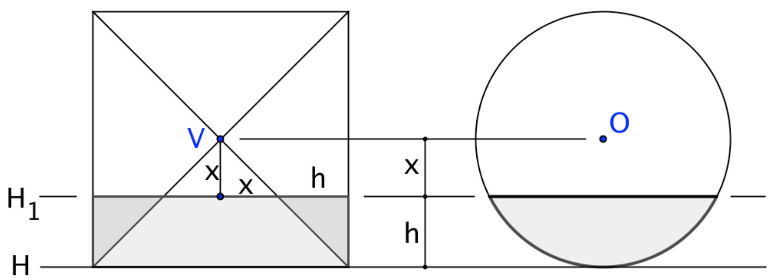
Substituindo na fórmula do volume temos

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 h + \frac{1}{3}\cdot \pi (R+r) rh$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot \pi R^2 h + \frac{1}{3}\cdot \pi Rrh + \frac{1}{3}\cdot r^2 h$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

3) Considere na mesma figura que utilizamos para encontrar o volume da esfera, um plano H_1 paralelo a H distando *h* de H. Agora, a mesma situação aparece em um desenho simplificado.



Pelo Princípio de Cavalieri o volume do segmento esférico de altura h em uma esfera de raio R é igual ao volume de um cilindro de raio R e altura h subtraído do volume de um tronco de cone de altura h cujas bases têm raios R e x.

Para fazer as contas observe que o raio da base menor do tronco de cone é $x = R - h$.

O volume do cilindro de raio R e altura h é

$$V_1 = \pi R^2 h.$$

O volume do tronco de cone de altura h com bases de raios R e x é

$$V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + x^2 + Rx)$$

ou seja,

$$V_2 = \frac{\pi h}{3}\left[R^2 + (R-h)^2 + R(R-h)\right] = \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh + h^2)$$

O volume do segmento esférico é $V = V_1 - V_2$.

$$V = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3Rh + h^2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(3R^2 - 3R^2 + 3R - h)$$

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$$

4) O menor dos dois segmentos esféricos tem altura $\frac{R}{2}$. Seu volume é

$$V_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{4}(3R - \frac{R}{2}) = \frac{5\pi R^3}{24}$$

O outro segmento esférico tem volume

$$V_2 = \frac{4\pi R^3}{3} - \frac{5\pi R^3}{24} = \frac{27\pi R^3}{24}$$

A razão entre os volumes das duas partes é $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{27}$.