PAPMEM - Julho/2014

Exercícios

Aritmética (1)

Prof. Luciano Monteiro de Castro

Exercícios:

1. Em uma competição escolar, todos os alunos da torcida da turma 32 tinham o número de sua turma estampado na camiseta e todos os alunos da torcida da turma 34 também tinham o número de sua turma estampado na camiseta. Pedro somou os números de todas as camisetas das duas torcidas, e obteve 2752 como resposta. Qual é o número de alunos na torcida da turma 32, se o número total de alunos nas duas torcidas é 84?

(A) 32 (B) 34 (C) 42 (D) 52 (E) 58

2. Um número X, de cinco algarismos, é interessante: se escrevermos o algarismo 1 à sua direita, ele fica três vezes maior do que se escrevermos 1 à sua esquerda. Qual é a soma dos algarismos do número X?

(A) 18 (B) 26 (C) 28 (D) 31 (E) 36

3. As casas do quadrado da figura foram preenchidas com nove números inteiros positivos, de modo a fazer com que os produtos dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal fossem todos iguais. Em seguida, seis números inteiros foram apagados, restando os números 6, 9 e 12, nas posições mostradas.

	6	9
		12

Se x era o número escrito na casa que está na primeira linha e na primeira coluna, e y era o número escrito na casa que está na primeira linha e na terceira coluna, então a soma $x + y$ é igual a

(A) 5 (B) 9 (C) 18 (D) 20 (E) 36

4. O número $n = 9999\ldots99$ tem 2009 algarismos e todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2?

Soluções

1. Se todos os 84 alunos fossem da torcida 32, a soma seria $84 \times 32 = 2688$. Cada aluno que "vira a casaca" e passa a torcer pela turma 34 aumenta esta soma em 2 unidades. Logo o número de alunos da torcida 34 é $\frac{2752-2688}{2} = 32$, e da torcida 32, $84 - 32 = 52$.

2. Podemos representar a condição do enunciado por $3 \times 1X = X1$. Como o triplo de $1X$ termina em 1, deduzimos que $1X$ termina em 7. Logo o penúltimo algarismo de $X1$ é 7. Deduzimos que o penúltimo algarismo de $1X$ é 5, pois multiplicado por 3 e somado com 2 (algarismo das dezenas de 3×7) deve terminar em 7. Da mesma forma deduzimos que o próximo algarismo é 8, e assim sucessivamente. Procedendo dessa forma deduzimos que $X = 42857$, logo a soma dos algarismos de X é igual a 26.

3. Temos $x \cdot 6 \cdot 12 = y \cdot 9 \cdot 12$, ou seja, $2x = 3y$. Como x e y são inteiros, existe um inteiro k tal que $x = 3k$ e $y = 2k$. O produto comum é $P = x \cdot 6 \cdot 12 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot k$. Representando por a_{ij} o número na linha i e coluna j, temos $a_{31} \cdot 6 \cdot 2k = P$, logo $a_{31} = 18$. Da mesma forma, $a_{21} \cdot 6 \cdot 9 = P$, logo $a_{21} = 4k$. Agora, a primeira coluna nos dá $3k \cdot 4k \cdot 18 = P$, e deduzimos que $k = 1$. Logo $x = 3, y = 2$ e $x + y = 5$.

4. Sendo $k = 2009$, temos $n = 10^k - 1$, logo $n^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = (10^k - 2) \cdot 10^k + 1$. Observamos que $10^k - 2$ é um número de k algarismos, cujos $k-1$ primeiros são iguais a 9 e o último é igual a 8. Assim, $n^2 = 99\dots9800\dots01$, com $k-1$ algarismos 9, um algarismo 8, $k-1$ algarismos 0 e um algarismo 1. A resposta é 2008.