PAPMEM - Julho 2014

Aritmética (1) -- Soluções

Prof. Luciano Monteiro de Castro

1. Se todos os 84 alunos fossem da torcida 32, a soma seria $84 \times 32 = 2688$. Cada aluno que "vira a casaca" e passa a torcer pela turma 34 aumenta esta soma em 2 unidades. Logo o número de alunos da torcida 34 é $\frac{2752-2688}{2} = 32$, e da torcida 32, $84 - 32 = 52$.

2. Podemos representar a condição do enunciado por $3 \times 1X = X1$. Como o triplo de $1X$ termina em 1, deduzimos que $1X$ termina em 7. Logo o penúltimo algarismo de $X1$ é 7. Deduzimos que o penúltimo algarismo de $1X$ é 5, pois multiplicado por 3 e somado com 2 (algarismo das dezenas de 3×7) deve terminar em 7. Da mesma forma deduzimos que o próximo algarismo é 8, e assim sucessivamente. Procedendo dessa forma deduzimos que $X = 42857$, logo a soma dos algarismos de X é igual a 26.

3. Temos $x \cdot 6 \cdot 12 = y \cdot 9 \cdot 12$, ou seja, $2x = 3y$. Como x e y são inteiros, existe um inteiro k tal que $x = 3k$ e $y = 2k$. O produto comum é $P = x \cdot 6 \cdot 12 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot k$. Representando por a_{ij} o número na linha i e coluna j, temos $a_{31} \cdot 6 \cdot 2k = P$, logo $a_{31} = 18$. Da mesma forma, $a_{21} \cdot 6 \cdot 9 = P$, logo $a_{21} = 4k$. Agora, a primeira coluna nos dá $3k \cdot 4k \cdot 18 = P$, e deduzimos que $k = 1$. Logo $x = 3, y = 2$ e $x + y = 5$.

4. Sendo $k = 2009$, temos $n = 10^k - 1$, logo $n^2 = 10^{2k} - 2 \cdot 10^k + 1 = (10^k - 2) \cdot 10^k + 1$. Observamos que $10^k - 2$ é um número de k algarismos, cujos $k-1$ primeiros são iguais a 9 e o último é igual a 8. Assim, $n^2 = 99\ldots9800\ldots01$, com $k-1$ algarismos 9, um algarismo 8, $k-1$ algarismos 0 e um algarismo 1. A resposta é 2008.