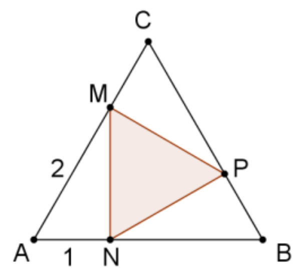
PAPMEM - Julho/2014

Áreas -- Soluções

Professor Eduardo Wagner

1) Tomemos o comprimento de AN como unidade. Como o ângulo AMN mede 30^{o} então $AM = 2$ e, consequentemente, $MN = \sqrt{3}$.



A razão entre as áreas dos triângulos MNP e ABC é:

$$\left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

2) Sejam $AP = x$ e $AM = y$.

Os triângulos APQ e ABC são semelhantes e a razão entre suas áreas é 2/3. Então,

$$\left(\frac{x}{120}\right)^2 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9600 \quad \Rightarrow \quad x = 40\sqrt{6}$$

Os triângulos AMN e ABC são semelhantes e a razão entre suas áreas é 1/3. Então,

$$\left(\frac{y}{120}\right)^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4800 \quad \Rightarrow \quad x = 40\sqrt{3}$$

Assim, $MP = 40(\sqrt{6} - \sqrt{3}) \cong 28{,}7\,\text{m}$.

3) Sejam $OA = a$, $OB = b$ e $OX = x$.

A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos triângulos OAX e OXB. Então,

$$\frac{ab\sin 120^{o}}{2} = \frac{ax\sin 60^{o}}{2} + \frac{bx\sin 60^{o}}{2}$$

Como $\sin 120^{o} = \sin 60^{o}$ temos $ab = ax + bx$, ou seja, $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

4) Sejam Q o ponto comum às cevianas, X a área de PBQ e Y a área de AQN.

Representando a área de um triângulo ABC por (ABC) temos:

a) Do lado esquerdo e do lado direito da ceviana AM,

$$\frac{(ABQ)}{(QBM)} = \frac{(ACQ)}{(QCM)} \quad \Rightarrow \quad \frac{84 + X}{40} = \frac{Y + 35}{30}$$

b) Acima e abaixo da ceviana BN,

$$\frac{(ABQ)}{(AQM)} = \frac{(BCQ)}{(QCN)} \quad \Rightarrow \quad \frac{84 + X}{Y} = \frac{70}{35}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $X = 56$ e $B = 70$.

A área do triângulo ABC é 315.