VC23NB — Variáveis complexas — 2018.1

Lista de exercícios: números complexos

1. Reduza à forma $a + bi$ cada uma das expressões dadas:

   (a) $(3-5i)(-2-4i)$

   (b) $(1+\frac{i}{3})(-\frac{6}{5}+3i)$

   (c) $\dfrac{1}{2+3i}$

   (d) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$

   (e) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{30}$

   (f) $(1-i)(\sqrt{3}+i)$

   (g) $1+2i+3i^2+4i^3+5i^4+6i^5$

2. Verifique que $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

3. Verifique que $(x-iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.

4. Verifique que $(x+iy)^2(x-iy)^2 = (x^2+y^2)^2$.

5. Mostre que $\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$.

6. Dado dois números complexos α e β, verifique que $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2$. Faça um gráfico e obtenha a seguinte interpretação geométrica: a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais.

7. Se o produto de dois números complexos for zero, mostre que pelo menos um deles tem que ser zero.

8. Determine o argumento dos números complexos dados, escreva esses números na forma polar e represente-os geometricamente.

   (a) $z = -2+2i$

   (b) $z = \left(\dfrac{i}{1+i}\right)^5$

   (c) $z = \dfrac{-3+3i}{1+i\sqrt{3}}$

9. Reduza os números z_1 e z_2 à forma polar e determine as formas polares de $z_1 z_2$ e z_1/z_2. Represente esses quatro números num gráfico.

   (a) $z_1 = \sqrt{3}+3i$, $z_2 = \dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$

   (b) $z_1 = 1-i$, $z_2 = -1+i\sqrt{3}$

10. Mostre que:

    (a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

    (b) $\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$

11. Verifique que $\left|\dfrac{2+i}{2-i\sqrt{3}}\right|^2 = \dfrac{5}{7}$ e $\left|\dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-3i)}{\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{2}$.

12. Mostre que $|z_1+z_2+\cdots+z_n| \le |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

13. Mostre que $|z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2|$, quaisquer que sejam os números complexos z_1 e z_2.

14. Geometricamente a multiplicação por i é uma rotação de $\pi/2$ radianos no sentido anti-horário. Verifique isso fazendo o gráfico de z e iz e o ângulo de rotação para:

    (a) $z = 2+2i$

    (b) $z = -1-5i$

    (c) $z = 4-3i$

15. Considere os números $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 4 - 5i$. Obtenha (na forma $x + iy$):

(a) $(5z_1 + 3z_2)^2$	(d) $Re(z_2^2)$, $(Re\ z_2)^2$	(g) $(4z_1 - z_2)^2$
(b) $\overline{z_1 z_2}$	(e) z_2/z_1	(h) $\overline{z_1}/z_1$, $z_1/\overline{z_1}$
(c) $Re(1/z_1^2)$	(f) $\overline{z_1}/\overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2}$	(i) $(z_1 + z_2)/(z_1 - z_2)$

16. Considere $z = x + iy$. Determine:

(a) $Im\ z^3$, $(Im\ z)^3$	(c) $Im\,[(1+i)^8 z^2]$
(b) $Re(1/\overline{z})$	(d) $Re(1/\overline{z}^2)$

17. Calcule as raízes indicadas e faça as representações gráficas correspondentes.

(a) $\sqrt[3]{-1}$	(d) $\sqrt{-2i}$	(g) $(-1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$
(b) $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$	(e) $\sqrt[3]{i}$	
(c) $\sqrt{2i}$	(f) $\sqrt[3]{-i}$	(h) $(-1 - i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

18. Resolva as equações:

(a) $z - \overline{z} = 1$	(b) $z + \overline{z}i = 2 + i$	(c) $z + 2\overline{z} = 1 - i$

19. Determine todas as soluções das equações:

(a) $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$	(c) $\overline{z}^3 = 1$
(b) $z^5 = -1$	(d) $z^7 = -(1 + i)$

20. Mostre que, para $z \neq 1$, tem-se $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{n-1} = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$.

21. Use o exercício anterior para mostrar que se $\omega \neq 1$ satisfaz a equação $\omega^n = 1$ então $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$.

22. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} i^n = 1,\ 1 + i,\ i$ ou zero, conforme o resto da divisão de N por 4 seja zero, 1, 2 ou 3, respectivamente.

23. Calcule $(2 + i)(3 + i)$ e deduza que $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.

24. Calcule $(5 - i)^4(1 + i)$ e deduza que $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$.