VC23NB — Variáveis complexas — 2018.1

Lista de exercícios: funções complexas

1. Verifique que:

   (a) $|e^{i\theta}| = 1$ $\qquad$ (b) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

2. Deduza as *fórmulas de Euler*:

   (a) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\qquad$ (b) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

3. Mostre que:

   (a) $1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{2\sin(\frac{\theta}{2})}$

   (b) $\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \dfrac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})}\left(\cos(\tfrac{\theta}{2}) - \cos[(n+\tfrac{1}{2})\theta]\right)$

4. Represente graficamente os conjuntos dados:

   (a) $Re\ z < -3$ $\qquad$ (d) $|z+1| \leq 2$ $\qquad$ (g) $Re\ \left(\dfrac{1}{z}\right) < \dfrac{1}{4}$

   (b) $Im\ z \geq 1$ $\qquad$ (e) $|z - 1 + i| < 3$

   (c) $|z - 2i| > 2$ $\qquad$ (f) $1 < |z + 1 - 2i| < 2$ $\qquad$ (h) $Re\ z^2 > 0$

5. Identifique o conjunto de pontos que satisfaz $|z-2| = |z-3i|$ e represente-o graficamente.

6. Determine as partes real e imaginária das funções dadas:

   (a) $f(z) = z^2 - 5z$ $\qquad$ (b) $f(z) = \dfrac{z-4i}{z+3i}$ $\qquad$ (c) $w = \dfrac{z - 3i\overline{z}}{z - i}$ $\qquad$ (d) $w = e^z(z-i)$

7. Determine o domínio máximo de definição das funções dadas:

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)\sin y}$ $\qquad$ (b) $f(z) = \dfrac{z}{\text{Re } z} - \dfrac{\text{Im } z}{z}$ $\qquad$ (c) $w = \dfrac{z^2 + (z-1)^3}{(e^z - 1)\cos y}$

8. Calcule $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$.

9. Sendo a e b números complexos constantes, mostre que:

   (a) $\displaystyle\lim_{z\to z_0}(az+b) = az_0 + b$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{z\to z_0}(az^2 + bz + c) = az_0^2 + bz_0 + c$

10. Mostre que $\displaystyle\lim_{z\to z_0} az^n = az_0^n$, sendo a uma constante complexa e n um inteiro positivo.

11. Calcule os limites indicados:

    (a) $\displaystyle\lim_{z\to i}\frac{z^3 - 27}{z - 3}$ $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{z\to -2i}\frac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ $\qquad$ (c) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$

12. Mostre que a função $w = 1/z$ é contínua em todo ponto $z \neq 0$.

13. Mostre que se $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$ então $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |L|$.

14. Mostre que se $f(z) \to 0$ com $z \to z_0$ e $g(z)$ é limitada numa vizinhança de z_0, então $f(z)g(z) \to 0$ com $z \to z_0$.

15. Calcule as derivadas das funções abaixo

    (a) $f(z) = 1 - z^2 + 4iz^5$ $\qquad$ (b) $f(z) = (z^2-i)^3(iz+1)^2$ $\qquad$ (c) $f(z) = \dfrac{z-3i}{z+3i}$

16. Mostre que a derivada de ordem n da função $f(z) = \dfrac{1}{z}$ é $f^{(n)}(z) = \dfrac{d^n}{dz^n}\dfrac{1}{z} = \dfrac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$.

17. Mostre que um polinômio de grau $n \geq 1$, $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ com $a_n \neq 0$, é uma função inteira com derivada $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}$ e que os coeficientes podem ser escritos como $a_0 = p(0)$, $a_1 = \dfrac{p'(0)}{1!}$, $a_2 = \dfrac{p''(0)}{2!}$, $\cdots$, $a_n = \dfrac{p^{(n)}(0)}{n!}$.

18. Lembrando que de $z = x + iy$ tem-se $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ e $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ então, pela regra da cadeia, tem-se $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} + i\dfrac{\partial v}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}} + i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\right)$. Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são equivalentes a $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Isto diz que uma função analítica não depende de $\overline{z}$.

19. Use as equações de Cauchy-Riemann para verificar quais funções $w = f(z)$ são analíticas e em que domínio. Em caso positivo, calcule a derivada $\dfrac{dw}{dz} = f'(z)$.

    (a) $w = z^3$
    (b) $w = \overline{e^z}$
    (c) $w = \overline{z}$
    (d) $w = 1/z$
    (e) $w = (e^y + e^{-y})\sin x + (e^y - e^{-y})\cos x$
    (f) $w = e^y(\cos x + i\sin x)$
    (g) $w = e^{-y}(\cos x + i\sin x)$
    (h) $w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\,[\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)]$

20. Verique se as funções são inteiras:

    (a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$
    (b) $f(z) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$
    (c) $f(z) = e^{-y}\sin x - ie^{-y}\cos x$
    (d) $f(z) = (z^2-2)e^{-x}e^{-iy}$
    (e) $f(z) = xy + iy$
    (f) $f(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$
    (g) $f(z) = e^y e^{ix}$

21. Dada a função $w = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x,y) = c_1$ e $v(x,y) = c_2$, para diferentes valores das constantes c_1 e c_2, e observe que essas curvas se cruzam em um ângulo reto.

22. Mostre que os zeros de $\cos z$ são $z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ e que os zeros de $\sin z$ são $z = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$.

23. Verifique que $\cos z$ e $\sin z$ são funções periódicas com período 2π.

24. Verifique que $\cosh z$ e $\sinh z$ são funções periódicas com período $2\pi i$.

25. Verifique que $\sin iz = i\sinh z$ e $\cos iz = \cosh z$.

Logaritmo: para $0 \neq z = re^{i\theta}$, o logaritmo do número complexo z é $\log z = \ln r + i\theta$.

26. Verifique que para $n \in \mathbb{Z}$:

    (a) $\log e = 1 + i2\pi n$

    (b) $\log i = \left(2n + \dfrac{1}{2}\right)\pi i$

Função logarítmica: dado $0 \neq z = re^{i\theta}$ com $r = |z| > 0$ e $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ (sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ um número qualquer), a função $\log z$ é definida por

$$\log z = \ln r + i\theta.$$

Valor principal: em particular, quando $\alpha = -\pi$ temos $-\pi < \theta < \pi$ e

$$\text{Log} z = \ln r + i\theta.$$

27. Verifique que:

    (a) $\text{Log}(-ei) = 1 - \dfrac{\pi}{2}i$

    (b) $\text{Log}(1 - i) = \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi}{4}i$

28. Verifique que:

    (a) $\text{Log}(1 + i)^2 = 2\ \text{Log}(1 + i)$

    (b) $\text{Log}(-1 + i)^2 \neq 2\ \text{Log}(1 + i)$

29. Verifique que:

    (a) $\log(i^2) = 2\ \log i$ quando $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{9\pi}{4}$ (aqui $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$).

    (b) $\log(i^2) \neq 2\ \log i$ quando $\dfrac{3\pi}{4} < \theta < \dfrac{11\pi}{4}$ (aqui $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$).

30. Verifique que $\dfrac{d}{dz}\log z = \dfrac{1}{z}$ (para $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$).